Programa Inmersión
Notas escritas por Dr. M

Notas del cursos. Basadas en los prontuarios de MATE 3001 y MATE 3023

Clase #1: lunes, 24 de junio de 2024.

1 Conjuntos y propiedades de los números naturales

1.1 Notación de conjuntos

La noción de conjunto es una de las principales en todo el campo de las matemáticas. La definición de conjunto es una bien sencilla:

Definición 1.1.1. Un conjunto es una colección de objetos (o elementos).

Cuando un elemento a pertenece a un conjunto A escribimos $a \in A$. Esto último see lee "a pertenece a A" o "a es elemento de A". Cuando un elemento c no pertenece a un conjunto A, entonces escribimos $c \notin A$.

Existen dos (2) formas de definir un conjunto:

- explícitamente: se escriben cada uno de los elementos del conjunto. Por ejemplo
  - $A = \{a, e, i, o, u\}$,
  - $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
  - $C = \{$domingo, lunes, martes, miercóles, jueves, viernes, sábado$\}$.
- implícitamente: cuando solamente se menciona una característica común de todos los elementos. Por ejemplo
  - $A = \{x \,|\, x \text{ es vocal}\}$,
  - $C = \{x \,|\, x \text{ es un día de la semana}\}$.

Un conjunto puede estar bien definido o no estarlo. Decimos que un conjunto está bien definido si podemos determinar qué elementos pertenecen o no al conjunto.

Ejemplo 1.1.2. El conjunto $A = \{x \,|\, x \text{ es vocal}\}$ está bien definido, pues dada una letra del alfabeto, sabemos si pertenece o no al conjunto. Por ejemplo

- $a \in A$, esto es, a es una vocal.
- $m \notin A$, o sea, m no es una vocal.

El conjunto $B = \{x \,|\, x \text{ es una persona bonita}\}$ no está bien definido, pues (agraciadamente para el profesor) no hay criterio definido para decir que una persona es o no bonita.

Subconjuntos

Definición 1.1.3. Decimos que un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B, y escribimos $A \subseteq B$, si todos los elementos de A pertenecen a B, i.e. si $x \in A$, entonces $x \in B$.

Ejemplo 1.1.4. Algunos ejemplos.

- Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$ el conjunto de los números naturales y $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ el conjunto de los números enteros. Note que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.
- Sea $A = \{a \,|\, a \text{ es un mamífero}\}$ y $B = \{b \,|\, b \text{ es un ser humano}\}$. Note que $B \subseteq A$.
- $A = \{a \,|\, a \text{ es un entero par y } a \text{ es primo}\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Note que $A \subseteq B$.
- $A = \{a \,|\, a \text{ es un enetero par mayor que 2 que es primo}\}$ y $B = \mathbb{N}$. Note que en este caso el conjunto A es vacío, esto es, no tiene ningún elemento. El conjunto vacío es denotado por $\emptyset$. El conjunto vacío $\emptyset$ es subconjunto de cualquier conjunto, por lo tanto $A \subseteq B$.

Igualdad de conjuntos

Definición 1.1.5. Decimos que dos conjuntos A y B son iguales, y escribimos $A = B$, si todos los elementos de A pertenecen a B y todos los elementos de B pertenecen a A. En otras palabras, $A = B$ si y solo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Ejemplo 1.1.6. Algunos ejemplos.

- Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{2, 3, 1, 5, 4\}$, entonces $A = B$.
- Si $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x^2 < 9\}$, entonces $A = B$.
- Si $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + x + 1 < 0\}$, entonces $A = \emptyset$.

El conjunto potencia

Definición 1.1.7. Dado un conjunto A, el conjunto potencia de A, denotado por $P(A)$, está definido como el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto A.

Ejemplo 1.1.8. Algunos ejemplos.

- Sea $A = \{1\}$, entonces $P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$.
- Sea $A = \{1, 2\}$, etonces $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.
- Sea $A = \{a, b, c\}$, etonces $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.
- Note que $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ y $P(P(\emptyset)) = P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

1.2 Operaciones en los conjuntos

Definición 1.2.1. El conjunto que contiene todos los elementos a los cuales podemos hacer referencia en un momento dado se llama el conjunto universo y se representa con la letra U.

Ejemplo 1.2.2. Si $A = \{a \,|\, a \text{ entero positivo par}\}$, entonces U puede ser el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$

Definición 1.2.3. Si A es un subconjunto del conjunto universo U, entonces el complemento de A está definido como el conjunto de los elementos del universo U que no pertenecen a A. El complemento de A se representa como $-A$, A^c o $\bar{A}$. Note que $A^c = \{x \in U \,|\, x \notin A\}$.

Ejemplo 1.2.4. Sea $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \emptyset$, entonces

$$\begin{aligned} A^c &= \{6,7,8,9,10\} \\ B^c &= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.5. Sea $U = \mathbb{N}$, $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \leq 100\}$ y $B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ es par}\}$, entonces

$$\begin{aligned} A^c &= \{101,102,103,104,\cdots\} \\ B^c &= \{1,3,5,7,9,11,\cdots\} \\ U^c &= \emptyset. \end{aligned}$$

Definición 1.2.6. La unión de los conjuntos A y B es el conjunto cuyos elementos pertenecen al universo y al conjunto A o al conjunto B o a ambos. La unión de A y B se representa simbólicamente como $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \in U \,|\, x \in A \text{ ó } x \in B\}.$$

Ejemplo 1.2.7. Si

$$\begin{aligned} U &= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ A &= \{1,2,3,4,5\} \\ B &= \{2,4\} \\ C &= \{4,5,6,7\}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1,2,3,4,5\} \\ B \cup A &= \{1,2,3,4,5\} \\ A \cup C &= \{1,2,3,4,5,6,7\} \\ B \cup C &= \{2,4,5,6,7\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.8. Si

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ es par}\} \\ B &= \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ es impar}\}, \end{aligned}$$

entonces $A \cup B = \mathbb{N}$.

Definición 1.2.9. La intersecciónde los conjuntos A y B es el conjunto cuyos elementos pertenecen al universo U y a los conjuntos A y B. La intersección de A y B se representa simbólicamente como $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \in U \,|\, x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Ejemplo 1.2.10. Si

$$\begin{aligned} U &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \\ A &= \{1, 2, 3, 4\} \\ B &= \{2, 4\} \\ C &= \{4, 5, 6, 7\} \\ D &= \{2\}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{2, 4\} \\ A \cap C &= \{4\} \\ B \cap C &= \{4, 6\} \\ C \cap D &= \emptyset \\ A \cap B^c &= \{1, 3\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.11. Si

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ es par}\} \\ B &= \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ es impar}\}, \end{aligned}$$

entonces $A \cap B = \emptyset$.

1.3 El conjunto de los números naturales

En esta sección analizaremos algunas propiedades de los números naturales. Al conjunto de los naturales se le pueden asignar dos operaciones binarias: suma y multiplicación. Empezamos discutiendo la operación de suma.

Suma

Los elementos con los cuales efectuamos una suma se llaman sumandos. El resultado de la operación se llama total o suma. Algunas propiedades de la suma de números naturales son las siguientes:

Propiedad 1.3.1 (Clausura)**.** Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces $a + b \in \mathbb{N}$.

Propiedad 1.3.2 (Conmutatividad)**.** Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces $a + b = b + a$.

Propiedad 1.3.3 (Asociatividad)**.** Si $a, b, c \in \mathbb{N}$, entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Ejemplo 1.3.4. Note que $2, 3, 4 \in \mathbb{N}$ y

$$\begin{aligned} 2 + 3 &= 5 = 3 + 2 \\ (2 + 3) + 4 &= 5 + 4 = 9 = 2 + 7 = 2 + (3 + 4). \end{aligned}$$

Multiplicación

Los elementos con los cuales efectuamos la multiplicación se llaman factores. El resultado de esta operación se llama productor. Si $c = ab$, entonces decimos que

a es factor o divisor de c
b es factor o divisor de c
c es múltiplo de a y de a.

Algunas propiedades de la multiplicación de números naturales son las siguientes:

Propiedad 1.3.5 (Clausura)**.** Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces $ab \in \mathbb{N}$.

Propiedad 1.3.6 (Conmutatividad)**.** Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces $ab = ba$.

Propiedad 1.3.7 (Asociatividad)**.** Si $a, b, c \in \mathbb{N}$, entonces $(ab)c = a(bc)$.

La siguiente propiedad relaciona las dos operaciones:

Propiedad 1.3.8 (Distribución)**.** Si $a, b, c \in \mathbb{N}$, entonces $a(b + c) = ab + ac$.

Ejemplo 1.3.9. Note que $2, 3, 4 \in \mathbb{N}$ y

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 &= 6 = 3 \cdot 2 \\ (2 \cdot 3)4 &= 6 \cdot 4 = 24 = 2 \cdot 12 = 2(3 \cdot 4) \\ 2(3 + 4) &= 2 \cdot 7 = 14 = 6 + 8 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4. \end{aligned}$$

Resta

Definición 1.3.10. Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces $a - b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $c + b = a$.

a se llama **minuendo**
b se llama **sustraendo**
c se llama **diferencia**.

Ejemplo 1.3.11. Note que $3, 6 \in \mathbb{N}$, pero $3 - 6 \notin \mathbb{N}$, pues no existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $6 + c = 3$. Ahora, $6 - 3 = 3 \in \mathbb{N}$, por lo tanto, $6 - 3 \neq 3 - 6$, o sea, la resta no es conmutativa. También, note que $5 - (3 - 2) = 5 - 1 = 4$, mientras que $(5 - 3) - 2 = 2 - 2 = 0$, por lo tanto, la resta no es asociativa.

El número 0

Supongamos que $a = b$, entonces $a - b = a - a = c$ tal que $c + a = a$, pero no existe $c \in \mathbb{N}$ que satisfaga esta condición. Por tal razón, introducimos un símbolo nuevo que llamamos cero lo representamos con el símbolo 0. El número satisface las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} 0+0 &= 0, \quad a+0=a=0+a, \quad \text{para todo } a \in \mathbb{N} \\ 0 \cdot 0 &= 0, \quad a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a, \quad \text{para todo } a \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

El número 0 se llama identidad respecto a la operación suma, pues $a + 0 = a$ para todo $a \in \mathbb{N}$.

División

Definición 1.3.12. Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces $a \div b \in \mathbb{N}$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $cb = a$.

a se llama **dividendo**

b se llama **divisor**

c se llama **cociente**.

Si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $a \div b = c$, entonces decimos que b divide al número a o que b es un factor de a y que a es un múltiplo de c y b. Decimos también que a es divisible por c y por b.

Ejemplo 1.3.13. Note que $15 \div 5 = 3$, pues $3 \cdot 5 = 15$. Decimos que

5 divide a 15

3 divide a 15

15 es un múltiplo de 3 y 5

15 es divisible por 3 y 5

En general, para dos naturales n y r, decimos que n es múltiplo de r si existe un elemento $t \in \mathbb{N}$ tal que $n = r \cdot t$. Cualquier número natural n es múltiplo de sí mismo, pues $n = 1 \cdot n$. El número 1 se llama la identidad multiplicativa.

Ejemplo 1.3.14. Note que $7 \div 2 \notin \mathbb{N}$, pues no existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $2 \cdot c = 7$.

Orden de operaciones

Si en una expresión apareen dos o más operaciones, entonces es necesario determinar el orden en el cual las efectuaremos.

Cuando aparecen multiplicaciones y sumas, las multiplicaciones se efectuarán primero a menos que haya un símbolo de agrupación que requiera otra cosa. Si sólo aparecen mutiplicaciones y divisiones, se efectúan las operaciones en el orden en que aparecen, de izquiera a derecha. Si hay divisiones y sumas, las divisiones se efectúan primero a menos que haya un símbolo de agrupación que requiera otra cosa. Si existe un síbolo de agrupación, las operaciones dentro del símbolo se efectúan primero y siguiendo las mismas reglas.

Ejemplo 1.3.15. Algunos ejemplos:

- $3 \cdot 2 + 5 = 6 + 5 = 11$.
- $(2+3) \cdot 2 + 5 = (5)2 + 5 = 10 + 5 = 15$.
- $6 \div 2 \cdot 3 \div 3 = 3 \cdot 3 \div 3 = 9 \div 3 = 3$
- $5 + 3[4 + 2(1+7)] = 5 + 3[4 + 2 \cdot 8] = 5 + 3[4 + 16] = 5 + 3[20] = 5 + 60 = 65$.

1.4 Divisores y múltiplos de números naturales

Definición 1.4.1. Un número natural distinto de 1 se dice que es primo si tiene exactamente dos factores naturales: 1 y propio número. Un número natural es compuesto si tiene otros factores además del propio número y el número 1.

Ejemplo 1.4.2. Los números $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$ son los primeros 7 primos. También, note que el número 1 no es primo ni compuesto.

Factorización

Teorema 1.4.3. Un número natural $n > 1$, o es primo, o se puede expresar como un producto de factores primos en forma única (excepto por el orden de los factores).

Ejemplo 1.4.4. Note que $24 = 2^3 \cdot 3$ y $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Definición 1.4.5. Dados dos naturales a y b, es posible determinar un número natural único c tal que

1. c es factor de a y b
2. c es el factor mayor que divide a ambos.

El número c se llama el divisor común mayor de a y b.

En esta clase utilizaremos la notación D_a para representar el conjunto de los divisores positivos de a. El divisor común mayor de a y b es denotador por $\mathrm{DCM}(a, b)$.

Ejemplo 1.4.6. Resuelva lo siguiente:

1. Halle el divisor común mayor de 24 y 36.

   Respuesta: Note que

   $$\begin{aligned} D_{24} &= \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \\ D_{36} &= \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}. \end{aligned}$$

   Ahora, $D_{24} \cap D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, por lo tanto, $\mathrm{DCM}(24, 36) = 12$.

2. Halle el divisor común mayor de 40 y 60.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} D_{40} &= \{1,2,4,5,8,10,20,40\} \\ D_{60} &= \{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}. \end{aligned}$$

   Ahora, $D_{40} \cap D_{60} = \{1,2,4,5,10,20\}$, por lo tanto, $\mathrm{DCM}(24,36) = 20$.

Otra forma de hallar el $\mathrm{DCM}(a,b)$ es utilizando las factorizaciones primas de ambos números. O sea, si

$$\begin{aligned} a &= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \\ b &= p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}, \end{aligned}$$

entonces,

$$\mathrm{DCM}(a,b) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \cdots p_r^{\min(\alpha_r,\beta_r)}$$

Ejemplo 1.4.7. Resuelva lo siguiente:

1. Halle el divisor común mayor de 24 y 36.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} 24 &= 2^3 \cdot 3 \\ 36 &= 2^2 \cdot 3^2. \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $\mathrm{DCM}(24,36) = 2^{\min(3,2)} \cdot 3^{\min(1,2)} = 2^2 \cdot 3 = 12$.

2. Halle el divisor común mayor de 40 y 60.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} 40 &= 2^3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5 \\ 60 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5. \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $\mathrm{DCM}(40,60) = 2^{\min(3,2)} \cdot 3^{\min(0,1)} 5^{\min(1,1)} = 2^2 \cdot 5 = 20$.

Múltiplo común menor

Dado un natural a, llamamos múltiplos de a a los números naturales divisibles por a. Los múltiplos de a se pueden representar como $a \cdot n$ donde $n \in \mathbb{N}$. Utilizaremos el símbolo M_a para denotar los múltiplos de a.

Ejemplo 1.4.8. Note que

$$\begin{aligned} M_2 &= \{2,4,6,8,10,12,\cdots\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ M_3 &= \{3,6,9,12,15,18,\cdots\} = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Definición 1.4.9. El múltiplo común menor de a y b es el natural c tal que

1. a y b dividen a c,
2. c es el natural menor que es divisible por ambos.

El múltiplo común menor de a y b es denotado por $\mathrm{MCM}(a, b)$.

Ejemplo 1.4.10. Haga lo siguiente:

1. Encuentre el $\mathrm{MCM}(2, 3)$.

   Respuesta: Note que

   $$\begin{aligned} M_2 &= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \cdots\} \\ M_3 &= \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \cdots\} \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $M_2 \cap M_3 = \{6, 12, 18, \cdots\}$. Concluimos que $\mathrm{MCM}(2, 3) = 6$.

2. Encuentre el $\mathrm{MCM}(4, 6)$.

   Respuesta: Note que

   $$\begin{aligned} M_4 &= \{4, 8, 12, 16, 20, 24, \cdots\} \\ M_6 &= \{6, 12, 18, 24, 30, \cdots\} \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $M_2 \cap M_3 = \{12, 24, 36, \cdots\}$. Concluimos que $\mathrm{MCM}(4, 6) = 12$.

Otra forma de hallar el $\mathrm{MCM}(a, b)$ es utilizando las factorizaciones primas de ambos números. O sea, si

$$\begin{aligned} a &= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \\ b &= p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}, \end{aligned}$$

entonces,

$$\mathrm{MCM}(a, b) = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \cdots p_r^{\max(\alpha_r, \beta_r)}$$

Ejemplo 1.4.11. Haga lo siguiente:

1. Encuentre el $\mathrm{MCM}(4, 6)$.

   Respuesta: Note que

   $$\begin{aligned} 4 &= 2^2 = 2^2 \cdot 3^0 \\ 6 &= 2 \cdot 3 \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $\mathrm{MCM}(4, 6) = 2^{\max(2,1)} 3^{\max(0,1)} = 2^2 \cdot 3 = 12$.

2. Encuentre el $\mathrm{MCM}(20, 40, 60)$.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} 20 &= 2^2 \cdot 5 \\ 40 &= 2^3 \cdot 5 \\ 60 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $\mathrm{MCM}(20, 40, 60) = 2^{\max(2,3,2)} 3^{\max(0,0,1)} 5^{\max(1,1,1)} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.