Programa Inmersión, Verano 2024
Notas escritas por Dr. M

Notas del cursos. Basadas en los prontuarios de MATE 3001 y MATE 3171

Clase #10: lunes, 8 de julio de 2024

10 Ecuaciones lineales

10.1 Conceptos básicos

La razón principal por la cual muchas personas se interesan en las matemáticas es por sus aplicaciones. En esta sección analizaremos varias formas de resolver algunos problemas que se presentan en la vida diaria.

Ecuaciones en una variable

Empezaremos esta discusión con algunos ejemplos de como traducir problemas escritos verbalmente a problemas escritos matemáticamente.

Ejemplo 10.1.1. Algunos ejemplos.

1. Dos más que un número es nueve. Esto se escribe como

$$n + 2 = 9.$$

2. El doble de un número es cinco más que su cuadrado. Esto se escribe como

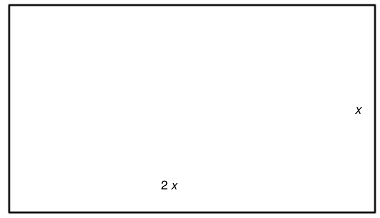
$$2n = n^2 + 5.$$

La traducción de problemas escritos verbalmente a problemas matemáticos es de suma importancia, ya que una vez el problema este escrito matemáticamente, en principio se pueden aplicar métodos matemáticos para obtener la solución de estos. A continuación algunos ejemplos de traducción de problemas verbales a problemas matemáticos y la resolución de estos.

Ejemplo 10.1.2. Algunos ejemplos.

1. El perímetro de un rectángulo mide 72 cm. Si su largo es el doble de su ancho, halla las dimensiones.

   Solución: Pare resolver este problema, es una buena idea obtener una representación gráfica de lo que nos dicen. Oberve que según las hipótesis, tenemos el siguiente rectángulo (la x representa la medida del ancho):



El problema nos dice que el perímetro mide 72 cm. Como el perímetro de un rectángulo es la suma de las medidas de sus lados, entonces tenemos la siguiente ecuación mateḿatica

$$2(x) + 2(2x) = 72.$$

La solución está dada por

$$\begin{aligned} 2(x) + 2(2x) &= 72 \\ 2x + 4x &= 72 \\ 6x &= 72 \\ x &= \frac{72}{6} \\ x &= 12. \end{aligned}$$

Concluimos que el ancho del rectángulo mide 12 cm, mientras el largo mide $2 \times 12 = 24$ cm.

2. La hija de Ana tiene 16 años. Hace cuatro años, la edad de la hija era un tercio de la edad que tenía Ana. Halla la edad actual de Ana.

   Solución: Sea x la edad actual de Ana. Sabemos que hoy día la hija de Ana tiene 16 años. Ahora bien, hace cuatro años, cuando la hija tenía 12 años y Ana $x - 4$, la edad de de la hija era un tercio de la edad de Ana. Esto nos lleva a la siguiente ecuación:

   $$12 = \frac{1}{3}(x - 4).$$

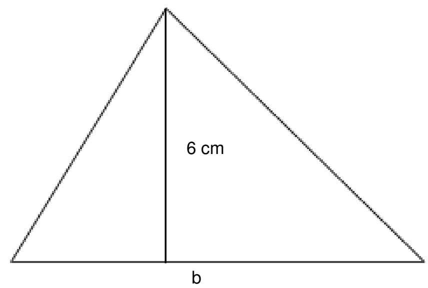
   La solución a esta ecuación está dada por

   $$\begin{aligned} \frac{1}{3}(x - 4) &= 12 \\ (x - 4) &= 3 \times 12 \\ x - 4 &= 36 \\ x &= 40. \end{aligned}$$

   Concluimos que Ana tiene 40 años.

3. El área de un triángulo mide 56 cm^2. Si la medida de la altura a la base es 6 cm, halla la medida de la base del triángulo.

Solución: Al igual que en el primer problema, para resolver este, es una buena idea obtener una representación gráfica de lo que nos dicen. Oberve que según las hipótesis, la medida de la altura a la base es 6 cm, pero no nos dicen nada acerca de la base, la cual representaremos con la letra b. Por lo tanto, tenemos el siguiente triángulo.



El problema nos dice que al área del triángulo mide 56 cm^2. Como el área de un triángulo es la mitad de la medida de la base por la medida de la altura, entonces tenemos la siguiente ecuación mateḿatica

$$56 = \frac{1}{2}b(6).$$

La solución a esta ecuación está dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}b(6) &= 56 \\ 3b &= 56 \\ b &= \frac{56}{3}. \end{aligned}$$

Concluimos que la medida de la base es 56/3 cm.

<u>Ecuaciones en dos variables</u>

Hasta el momento, todos los problemas que hemos considerados son lineales y envuelven una sola variable. Cuando trabajamos con problemas que provienen de aplicaciones a la vida real, es muy probable que la resolución de estos dependan de más de una variable. Como un ejemplo considere el siguiente problema en dos variables. Si nos dicen que el perímetro de un rectángulo mide 75 cm, pero no nos dan más información, entonces tenemos la ecuación

$$2a + 2l = 72,$$

donde a y l representan el ancho y largo (resp.) del rectángulo en consideración. Ahora, ¿cuáles son las posibles dimensiones que puede tener dicho triángulo? Bueno, algunos valores que puede tener tal rectángulo son los siguitenes:

ancho	20	19	18	17	16	5.5	$\cdots$
largo	16	17	18	19	20	30.5	$\cdots$

Observe que a cada valor posible del ancho, le corresponde un valor del largo. Existe un número infinito de valores posibles para el largo y el ancho que satisfacen la relación

$$2a + 2l = 72.$$

El conjunto de pares ordenados (a, l) que satisfacen la ecuación $2a + 2l = 72$ se llama el conjunto solución de la ecuación y se representa como

$$\{(a, l) \,|\, 2a + 2l = 72\}.$$

Note que, en un principio, no todas las soluciones en el conjunto solución son soluciones al problema original. Por ejemplo, $(-5, 41)$ pertenece al conjunto solución de la ecuación $2a + 2l = 72$, sin embargo, no es solución al problema original, pues no existe rectángulo alguno con ancho -5.

10.2 Gráfica de una ecuación lineal en dos variables

En general, una ecuación lineal en dos variables x, y, se escribe en la forma

$$ax + bx + c = 0,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y a o b son diferentes de cero.

El conjunto solución de una ecuación lineal en dos variables es un conjunto de pares ordenados (x_0, y_0) tales

$$ax_0 + by_0 + c = 0.$$

En el capítulo 5 establecimos la relación que asocia un punto del plano cartesiano a cada par ordenado. Por lo tanto, podemos graficar el conjunto solución de una ecuación en dos variables.

Ejemplo 10.2.1. Algunos ejemplos.

1. Dibuja la gráfica de $2x + 3y = 3$.

   Solución: Note que el conjunto solución está dado por

   $$\{(x, y) \,|\, 2x + 3y = 3\}.$$

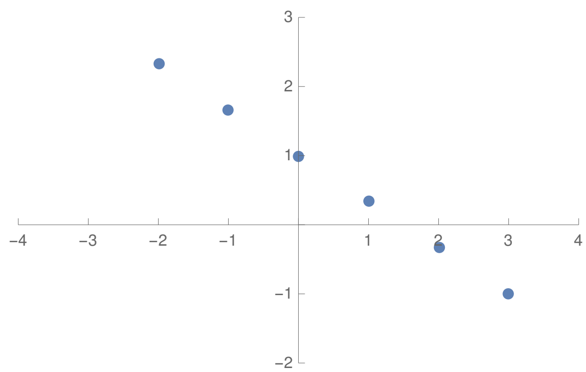
   La relación entre las variables nos dice que

   $$\begin{aligned} 2x + 3y &= 3 \\ 3y &= 3 - 2x \\ y &= \frac{3 - 2x}{3}. \end{aligned}$$

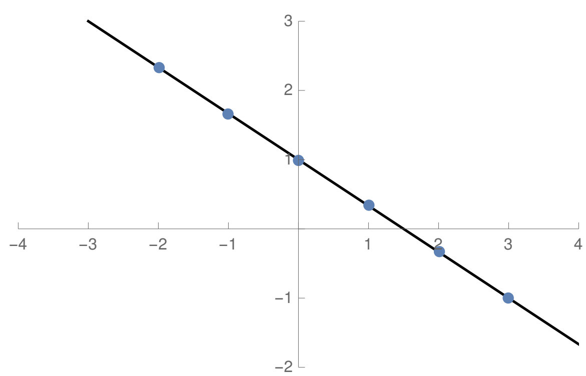
   Por lo tanto, ya tenemos la segunda variable escrita explícitamente en términos de la primera. Para graficar la solución, primero conseguimos algunos pares ordenados que pertenezcan a el conjunto solución.

x	$y = (3 - 2x)/3$
-2	$7/3$
-1	$5/3$
0	1
1	$1/3$
2	$-1/3$
3	-1

Ahora graficamos estos puntos en el plano.



Finalmente, conectamos los puntos para obtener la gráfica.



2. Dibuja la gráfica de $3x - 2y = 5$.

   Solución: Note que el conjunto solución está dado por

$$\{(x, y) \mid 3x - 2y = 5\}.$$

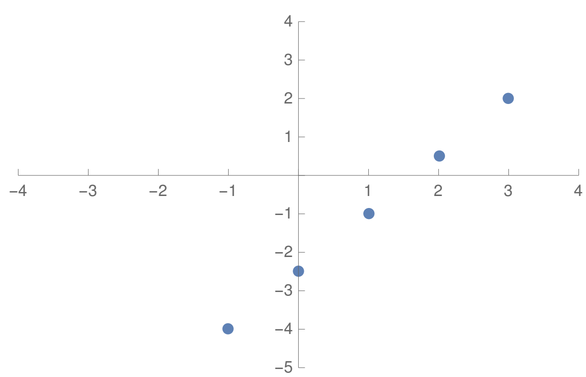
x	$y = (3x-5)/2$
-1	-4
0	$-5/2$
1	-1
2	$1/2$
3	3

La relación entre las variables nos dice que

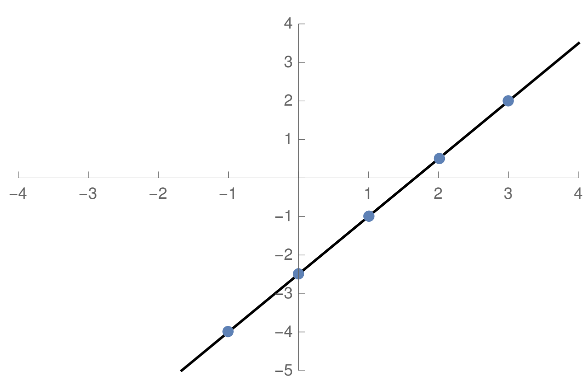
$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ -2y &= 5 - 3x \\ y &= \frac{5-3x}{-2} \\ y &= \frac{3x-5}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, ya tenemos la segunda variable escrita explícitamente en términos de la primera. Para graficar la solución, primero conseguimos algunos pares ordenados que pertenezcan a el conjunto solución.

Ahora graficamos estos puntos en el plano.



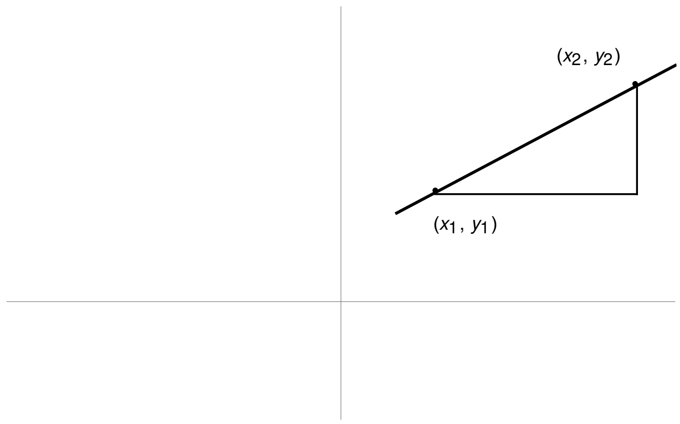
Finalmente, conectamos los puntos para obtener la gráfica.



10.3 Ecuación de una recta

Pendiente de una recta

Es de conocimiento común que toda recta en el plano se determina por dos puntos. En esta sección veremos qué propiedades algebraicas podemos obtener dada un recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) (resp.) tales que $P_1 \neq P_2$.



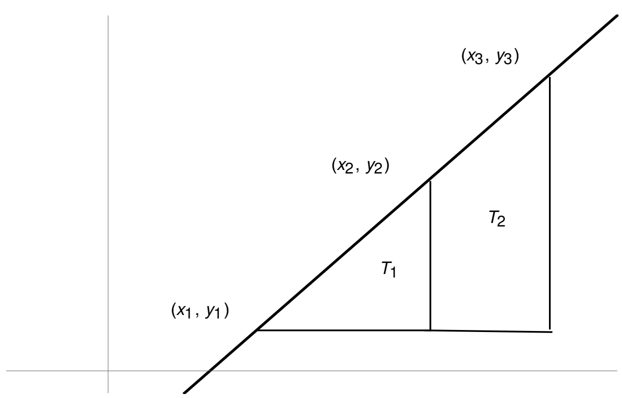
Al movernos del punto P_1 al punto P_2 obtenemos un cambio en las abscisas (x) y en las ordenadas (y). Hallemos la razón del cambio en las ordenadas respecto al cambio en las abscisas.

$$\begin{aligned} \text{Cambio en las ordenadas:} \quad & y_2 - y_1 \\ \text{Cambio en las abscisas:} \quad & x_2 - x_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la razón está dada por

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ahora veremos que para cada recta, esta razón es constante, independientemente de los puntos escogidos. Suponga que tenemos una recta y tres puntos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_1 = (x_3, y_3)$. Entonces, tenemos la siguiente gráfica



Note que la razón del cambio en las ordenadas respecto al cambio en las abscisas de los puntos P_1 y P_2 es

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

la cual corresponde a la razón entre la altura y la base del triángulo T_1. De igual forma, la razón del cambio en las ordenadas respecto al cambio en las abscisas de los puntos P_1 y P_3 es

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1},$$

la cual corresponde a la razón entre la altura y la base del triángulo T_2 (triángulo grande). Ahora, los triangulos T_1 y T_2 son semejantes, por lo tanto, la razón entre la altura y la base de ambos produce el mismo número. Concluimos que

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

y por lo tanto, esta razón es constante, independientemente de los puntos escogidos. A esta razón la llamaremos *pendiente* de la recta y usualmente la denotamos por m. Observe que demostramos que si $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ son dos puntos en la recta, entonces la pendiente está dada por

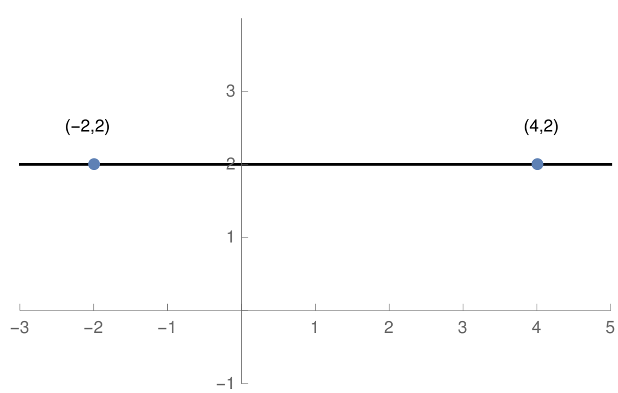
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ejemplo 10.3.1. Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(-4, 5)$.

Solución: Note que la pendiente está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 3}{-4 - 1} = \frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}.$$

Observe que una recta paralela al eje de x, todos los puntos tienen la misma ordenada. Por lo tanto, el cambio en la ordenada es cero. Tada racta con pendiente cero es paralela al eje de x. Por ejemplo, considere la recta que pasa por $(-2, 2)$ y $(4, 2)$.



Note que su pendiente es

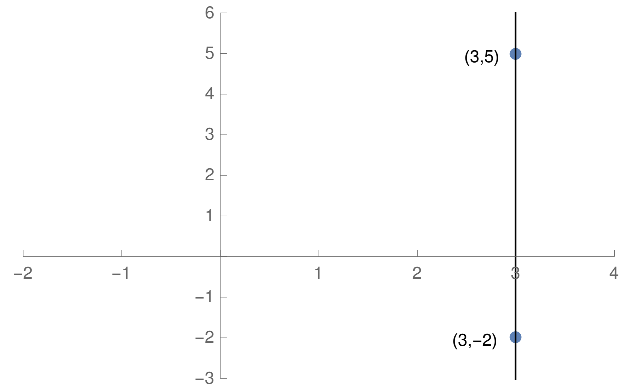
$$m = \frac{2-2}{4-2} = \frac{0}{2} = 0$$

y es paralela al eje de x.

Considere ahora la recta que pasa por los puntos $(3,5)$ y $(3,-2)$. ¿Cuál es la pendiente de esta recta? Veamos,

$$m = \frac{5-(-2)}{3-3} = \frac{7}{0}. \quad \text{No está definida.}$$

Observe que la gráfica de esta recta está dada por



O sea, la recta es paralela al eje de y. En realidad, la pendiente de una recta paralela al eje de y no está definida.

Resumen:

1. Si $m > 0$, entonces la recta es creciente (mire ejemplo 2 de la sección anteior).
2. Si $m < 0$, entonces la recta es decreciente (mire ejemplo 1 de la sección anteior).
3. Si $m = 0$, entonces la recta es paralela al eje de x.
4. Si m no existe, entonces la recta es paralela al eje de y.

Formas diferentes de la ecuación de una recta.

Hemos visto que dada una ecuación de la forma $a + by + c = 0$, podemos representar en el plano su gráfica, que consiste de todos los pares ordenados asociados al conjunto

$$\{(x,y) \mid ax + by + c = 0\}.$$

En esta sección veremos que si tenemos una recta que no es vertical, entonces podemos escribirla de la forma $y = mx + b$.

Suponga que tenemos una recta no vertical que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Su pendiente esta determinada por el siguiente cociente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ahora bien, sabemos que la pendiente m no depende de los puntos escogidos, por lo tanto, si (x, y) es cualquier punto arbitrario de la recta, entonces

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

De aquí obtenemos la ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Punto-pendiente

La ecuación de la recta con pendiente m que pasa por el punto (x_1, y_1) está dada por

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Punto-punto

La ecuación de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

donde

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ejemplo 10.3.2. Algunos ejemplos.

1. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(-3, 4)$.

   Solución: Primero buscamos la pendiente. Para esto, note que

   $$m = \frac{4 - 2}{-3 - 1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

   Ahora utilizamos cualquiera de los dos puntos. Por ejemplo, si utilizamos $(1, 2)$, entonces obtenemos

   $$\begin{aligned} y - 2 &= -\frac{1}{2}(x - 1) \\ y - 2 &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 2 \\ y &= -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

   Por otro lado, si utilizamos el punto $(-3, 4)$, entonces

   $$\begin{aligned} y - 4 &= -\frac{1}{2}(x - (-3)) \\ y - 4 &= -\frac{1}{2}(x + 3) \\ y - 4 &= -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ y &= -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + 4 \\ y &= -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, una vez tengamos la pendiente, podemos utilizar cualquier punto para obtener la ecuación de la recta.

2. Encuentre la recta que pasa por el punto $(2, 3)$ con pentiende 5.

   Solución: Utilizando la fórmula punto-pendiente, obtenemos

$$\begin{aligned} y - 3 &= 5(x - 2) \\ y - 3 &= 5x - 10 \\ y &= 5x - 10 + 3 \\ y &= 5x - 7. \end{aligned}$$

3. Encuentre ecuación de la recta que tiene pendiente 3 y corte en el eje de y igual a 4.

   Solución: Note que cuando nos dicen que el corte en el eje de y es 4, nos están diciendo que $(0, 4)$ es parte de la línea. Entonces, utilizando la fórmula punto pendiente, obtenemos

$$\begin{aligned} y - 4 &= 3(x - 0) \\ y - 4 &= 3x \\ y &= 3x + 4. \end{aligned}$$

Intercepto de y

La ecuación de la recta con pendiente m y corte en el eje de y igual a b es

$$y = mx + b.$$

Forma general

La ecuación $ax + by + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, a o b dierentes de 0, se llama forma general de la ecuación de la recta.

Ejemplo 10.3.3. Algunos ejemplos.

1. Escribe la ecuación $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{5}$ en forma general.

   Solución: Note que

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{5} \\ 15y &= 15\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}\right) \\ 15y &= 10x - 3 \\ 0 &= 10x - 15y - 3. \end{aligned}$$

2. Escribe la ecuación general de la recta cuya gráfica corta el eje de x en -1 y tiene pendiente 3.

   Solución: Note que decir que la gráfica corta el eje de x en -1 es lo mismo que decir que $(-1, 0)$ está en la gráfica. Ahora, utilizando la fórmula punto-pendiente obtenemos

$$\begin{aligned} y - 0 &= 3(x + 1) \\ y &= 3x + 3 \\ 0 &= 3x - y + 3 \end{aligned}$$

3. Escribe la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(1, -3)$.

   Solución: En este caso tenemos que la pendiente no está definida. Por lo tanto, la recta es paralela al eje de y. Note que en realidad la fórmula está dada por $x = 3$. Por lo tanto, la ecuación general está dada por

$$x - 3 = 0.$$

<u>Relación entre dos rectas</u>

Suponga que tenemos dos rectas con pendientes m_1 y m_2, entonces

1. Si $m_1 = m_2$, entonces las rectas son paralelas.
2. Si $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$, entonces las rectas son perpendiculares.
3. Si $m_1 \neq m_2$, entonces las rectas se intersectan en un punto.

Ejemplo 10.3.4. Algunos ejemplos.

1. Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta $y = 2x + 1$.

   Solución: Note que la pendiente de la recta $y = 2x + 1$ es 2. Como la recta que queremos es paralela a esta recta, entonces también tiene pendiente 2. Entonces, sabemos que la pendiente es 2 y pasa por el punto $(0, 0)$. Concluimos que la recta está dada por

$$\begin{aligned} y - 0 &= 2(x - 0) \\ y &= 2x. \end{aligned}$$

2. Determine si las rectas $4x - 2y = 6$ y $3y - 12x - 6 = 0$ se intersecan en un punto.

Solución: Note que

$$\begin{aligned}
4x - 2y &= 6 \\
-2y &= -4x + 6 \\
y &= \frac{-4x+6}{-2} \\
y &= 2x - 3.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
3y - 12x - 6 &= 0 \\
3y &= 12x + 6 \\
y &= \frac{12x+6}{3} \\
y &= 4x + 2.
\end{aligned}$$

Concluimos que las rectas se intersecan en un punto.