Programa Inmersión, Verano 2024
Notas escritas por Dr. M

Notas del cursos. Basadas en los prontuarios de MATE 3001 y MATE 3171

<u>**Clase #11:**</u> martes, 9 de julio de 2024.

10.4 Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 10.4.1. Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales en las mismas variables. La solución de un sistema de ecuaciones es la intersección de los conjuntos de soluciones de cada una de las ecuaciones en el sistema.

Los siguientes son ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales.

1. $\begin{cases} x = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 2x = 5 \end{cases}$

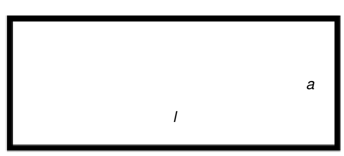
3. $\begin{cases} 5x = 3 \\ 2x + 3y = 1 \\ 5x + 2y + 3t = 2 \end{cases}$

En la vida diaria, obtenemos sistemas de ecuaciones cuando establecemos relaciones entre las variables que cumplen ciertas condiciones de un problema.

Ejemplo 10.4.2. Algunos ejemplos (solo encuentre el sistema de ecuaciones).

1. El perímetro de un rectángulo mide 72 cm. Si su largo es el doble de su ancho, halla sus dimensiones.

   Solución: Observe que tenemos el siguiente rectángulo

   El perímetro del rectángulo es igual a la suma de las medidas de los lados del rectángulo. Por lo tanto, tenemos

   $$P = 2a + 2l.$$

Como el largo l es el doble del ancho a, obtenemos la ecuación

$$l = 2a.$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones que obtenemos es el siguiente

$$\begin{aligned} 2a + 2l &= 72 \\ 2a - l &= 0. \end{aligned}$$

2. Tres libretas y dos lápices cuestan \$5.40. Cuatro libretas y cinco lápices de la misma clase cuestan \$7.55. ¿Cuál es el precio de una de estas libretas y uno de estos lápices?

   Solución: Hallemos el sistema de ecuaciones que exprese la relación. Sea x el costo de una libreta y y el costo de los lápices. Entonces, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5.40 \\ 4x + 5y &= 7.55. \end{aligned}$$

¿Cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales en dos variables?

A continuación analizaremos algunos ejemplos.

1. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x - y &= 2. \end{aligned}$$

   Solución: Sea A el conjunto solución de la ecuación $2x + y = 3$, i.e.

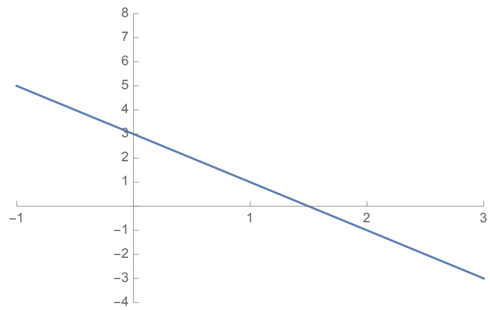
$$A = \{(x, y) \,|\, 2x + y = 3\}.$$

   Recuerde que podemos gráficar este conjunto. Primero buscamos la relación entre las variables. Note que

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ y &= 3 - 2x. \end{aligned}$$

   Ahora graficamos esta recta (en azul). Sea B el conjunto solución de la ecuación $x - y = 2$, i.e.

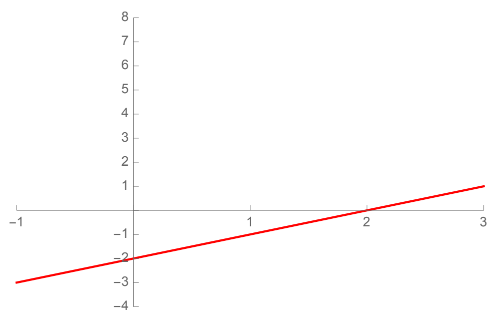
$$B = \{(x, y) \,|\, x - y = 2\}.$$



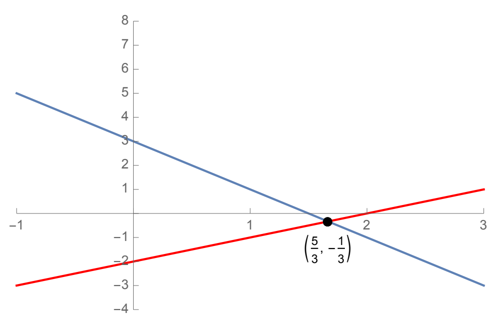
Ahora buscamos la relación entre las variables. Note que

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ -y &= 2 - x \\ y &= x - 2. \end{aligned}$$

Finalmente, graficamos esta recta (en rojo)



Ahora que tenemos esta información, ¿cuál es la solución? Bueno, la solución al sistema es la intersección de estas dos rectas.



Concluimos que la solución es $(5/3, -1/3)$.

2. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ x - 2y + 8 &= 0. \end{aligned}$$

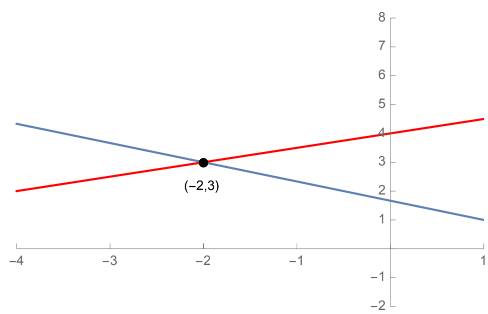
Solución: Primero encontramos la relación de las variables en ambas rectas. Por ejemplo, en la primera recta tenemos que

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 3y &= 5 - 2x \\ y &= \frac{5 - 2x}{3}. \end{aligned}$$

En la segunda recta tenemos

$$\begin{aligned} x - 2y + 8 &= 0 \\ x - 2y &= -8 \\ -2y &= -8 - x \\ y &= \frac{-8 - x}{-2} \\ y &= \frac{8 + x}{2}. \end{aligned}$$

Ahora graficamos las dos gráficas. La que corresponde a la primera ecuación está en azul, mientras la que corresponde a la segunda ecuación está en rojo.



Concluimos que la solución es $(-2, 3)$.

La resolución de un sistema de ecuaciones lineales puede encontrarse sin la necesidad de graficar las rectas que aparecen y encontrar la intersección de éstas. En realidad, resolver estos sistemas se puede hacer transformando el sistema a uno equivalente que este en forma escalonada, i.e. a un sistema de la forma

$$\begin{cases} ax + by = c \\ x = d \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} ax + by = c \\ y = d \end{cases}$$

Los pasos a seguir para encontrar la forma escalonada son los siguientes:

1. Intercambiamos cualesquiera dos ecuacioes en el sistema.
2. Multiplicamos o dividimos cada lado de una de las ecuaciones por una constante diferente de cero y reemplazamos en el sistema esa ecuación por la ecuación equivalente resultante.

3. Sustituimos cualquier ecuación del sistema por la suma o diferencia de esa ecuación y cualquier otra ecuación en el sistema.

Ejemplo 10.4.3. Algunos ejemplos.

1. Encuentre la solución al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x - y &= 2. \end{aligned}$$

   Solución: Trataremos de escribr el sistema en una escalonado. Primero, note que si sumamos la segunda igualdad a la primera (y reemplazamos la primera con el resultado), obtenemos

$$\begin{aligned} 3x &= 5 \\ x - y &= 2. \end{aligned}$$

   Ahora, multplique la ecuación de arriba por 1/3 e intercambie las el orden de las ecuaciones para obtener

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

   Este sistema está escalonado. Más aún, ahora sabemos que el valor de x es $5/3$. Reemplace este valor en la primera ecuación para obtener

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ \frac{5}{3} - y &= 2 \\ \frac{5}{3} - 2 &= y \\ \frac{5}{3} - \frac{6}{3} &= y \\ -\frac{1}{3} &= y. \end{aligned}$$

   Concluimos que la solución al sistema es $(5/3, 1/3)$. Compare esta solución con la obtenida en el Ejemplo 1 de la página 3.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ x - 2y + 8 &= 0. \end{aligned}$$

Solución: Note que tenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ x - 2y &= -8. \end{aligned}$$

Multiplique la segunda ecuación por -2 y sumela a la primera para obtener

$$\begin{aligned} 7y &= 21 \\ x - 2y &= -8. \end{aligned}$$

Ahora multiplique la primera ecuación por $1/7$ e intercambie el orden de las ecuaciones para obtener

$$\begin{aligned} x - 2y &= -8 \\ y &= 3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos que $y = 3$. Reemplace este valor en la primera ecuación para obtener

$$\begin{aligned} x - 2y &= -8 \\ x - 2(3) &= -8 \\ x - 6 &= -8 \\ x &= -8 + 6 \\ x &= -2. \end{aligned}$$

Concluimos que la solución está dada por $(-2, 3)$. Compare esta solución con la del Ejemplo 2 de la página 4.

Finalmente, otra forma de resolver sistema de ecuaciones lineales con dos varibales es con el método de sustitución. Consideremos los dos ejemplos anteriores para ver como funciona este método.

Ejemplo 10.4.4. Los ejemplos anteriores.

1. Encuentre la solución al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x - y &= 2. \end{aligned}$$

   Solución: Tratemos de escribir una de las variables en términos de la otra. Para esto, note que la seguna ecuación nos dice que

$$x = 2 + y.$$

   Ahora sustituya esto en la primera ecuación (siempre utilizamos la otra ecuación) para obtener

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 2(2 + y) + y &= 3 \\ 4 + 2y + y &= 3 \\ 3y &= -1 \\ y &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ahora escoja cualquiera de las dos ecuaciones (en este caso escogimos la segunda ecuación) y sustituya el valor de y encontrado para obtener

$$\begin{aligned}
x - y &= 2 \\
x - (-\frac{1}{3}) &= 2 \\
x + \frac{1}{3} &= 2 \\
x &= 2 - \frac{1}{3} \\
x &= \frac{6}{3} - \frac{1}{3} \\
x &= \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Concluimos que la solución al sistema es $(5/3, 1/3)$.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
2x + 3y &= 5 \\
x - 2y + 8 &= 0.
\end{aligned}$$

Solución: Note que tenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
2x + 3y &= 5 \\
x - 2y &= -8.
\end{aligned}$$

Note que la segunda ecuación implica que

$$x = -8 + 2y.$$

Sustituya este valor en la primera ecuación para obtener

$$\begin{aligned}
2x + 3y &= 5 \\
2(-8 + 2y) + 3y &= 5 \\
-16 + 4y + 3y &= 5 \\
7y &= 5 + 16 \\
7y &= 21 \\
y &= 3.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos que $y = 3$. Reemplace este valor en cualquiera de las ecuaciones, en este caso, escojimos la segunda, para obtener

$$\begin{aligned}
x - 2y &= -8 \\
x - 2(3) &= -8 \\
x - 6 &= -8 \\
x &= -8 + 6 \\
x &= -2.
\end{aligned}$$

Concluimos que la solución está dada por $(-2, 3)$.

11.5 Ecuaciones con radicales

Definición 11.5.1. Llamamos ecuación con radicales a una ecuación que contiene la variable dentro de un símbolo de radical, por lo menos en uno de sus términos.

Ejemplo 11.5.2. Algunos ejemplos.

1. $\sqrt{x+2} = 4$.
2. $\sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{x+1}$.

   La siguiente no es un ejemplo de una ecuación con radicales.

3. $\sqrt{3}x - 2 = 0$.

Para hallar el conjunto solución de una ecuación con radicales, la transformamos en una ecuación racional y hallamos el conjunto solución de esta última. Cabe destacar que ambas ecuaciones no son equivalentes, pero el conjunto solución de la ecuación con radicales es un subconjunto del conjunto solución de la ecuación racional.

Ejemplo 11.5.3. Algunos ejemplos.

1. Encuentre el conjunto solución de la ecuación

   $$\sqrt{3x+7} = 5.$$

   Solución: Cuadre ambos lados de la ecuación para obtener

   $$\begin{aligned} (\sqrt{3x+7})^2 &= 5^2 \\ 3x+7 &= 25 \\ 3x &= 25-7 \\ 3x &= 18 \\ x &= 6. \end{aligned}$$

   Concluimos que el conjunto solución a la ecuación racional está dado por $\{6\}$. Ahora sustituya $x = 6$ en el lado izquierdo de la ecuación original para obtener

   $$\sqrt{3(6)+7} = \sqrt{25} = 5.$$

   Concluimos que el conjunto solución a la ecuación radical es $\{6\}$.

2. Encuentre el conjunto solución de la ecuación

   $$\sqrt{x-1} = -2.$$

   Solución: Cuadre ambos lados de la ecuación para obtener

   $$\begin{aligned} (\sqrt{x-1})^2 &= (-2)^2 \\ x-1 &= 4 \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Concluimos que el conjunto solución a la ecuación racional está dado por $\{5\}$. Ahora sustituya $x = 5$ en el lado izquierdo de la ecuación original para obtener

$$\sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2 \neq -2.$$

Concluimos que el conjunto solución a la ecuación radical es $\emptyset$.

3. Encuentre el conjunto solución de la ecuación

$$\sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{x+1}.$$

Solución: Eleve al cubo ambos lados de la ecuación para obtener

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{2x-3})^3 = (\sqrt[3]{x+1})^3 \\ 2x-3 &= x+1 \\ x &= 1+3 \\ x &= 4.\end{aligned}$$

Concluimos que el conjunto solución a la ecuación racional está dado por $\{4\}$. Ahora sustituya $x = 4$ en la ecuación original para obtener

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2(4)-3} &= \sqrt[3]{4+1} \\ \sqrt[3]{5} &= \sqrt[3]{5}.\end{aligned}$$

Concluimos que el conjunto solución a la ecuación radical es $\{4\}$.

4. Encuentre el conjunto solución de la ecuación

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{x} + 1.$$

Solución: Eleve al cuadrado ambos lados de la ecuación para obtener

$$\begin{aligned}(\sqrt{x+1})^2 &= (\sqrt{x}+1)^2 \\ x+1 &= x + 2\sqrt{x} + 1 \\ 0 &= 2\sqrt{x} \\ 0 &= \sqrt{x} \\ 0 &= x \quad \text{(cuadrando ambos lados de la ecuación)}\end{aligned}$$

Concluimos que el conjunto solución a la ecuación racional está dado por $\{0\}$. Ahora sustituya $x = 0$ en la ecuación original para obtener

$$\begin{aligned}\sqrt{0+1} &= \sqrt{0} + 1 \\ 1 &= 1.\end{aligned}$$

Concluimos que el conjunto solución a la ecuación radical es $\{0\}$.

5. Encuentre el conjunto solución de la ecuación

$$\sqrt[3]{x^2-1}-2=0$$

Solución: Primero escriba la ecuación como

$$\sqrt[3]{x^2-1}=2$$

Ahora eleve al cubo ambos lados de la ecuación para obtener

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{x^2-1})^3 &= 2^3\\ x^2-1 &= 8\\ x^2 &= 9\\ x &= \pm 3.\end{aligned}$$

Concluimos que el conjunto solución a la ecuación racional está dado por $\{\pm 3\}$. Verifiquemos ahora si estos valores satisfacen la ecuación original. Sustituya primero el valor $x=3$ en la ecuación original para obtener

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{3^2-1} &= 2\\ \sqrt[3]{8} &= 2\\ 2 &= 2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $x=3$ es solución. Sustituya ahora $x=-3$ en la ecuación original para obtener

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{(-3)^2-1} &= 2\\ \sqrt[3]{8} &= 2\\ 2 &= 2\end{aligned}$$

Concluimos que el conjunto solución a la ecuación radical es $\{\pm 3\}$.

6. Encuentre el conjunto solución de la ecuación

$$\frac{\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}+1}=4.$$

Solución: Limpie denominadores para obtener

$$\begin{aligned}\sqrt{x}+9 &= 4(\sqrt{x}+1)\\ \sqrt{x}+9 &= 4\sqrt{x}+4\\ 9-4 &= 4\sqrt{x}-\sqrt{x}\\ 5 &= 3\sqrt{x}\\ \frac{5}{3} &= \sqrt{x}\\ \frac{25}{9} &= x \quad \text{(cuadrando ambos lados de la ecuación)}\end{aligned}$$

Concluimos que el conjunto solución a la ecuación racional está dado por $\{25/9\}$. Ahora sustituya $x = 25/9$ en la ecuación original para obtener

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{25/9}+9}{\sqrt{25/9}+1} &= 4 \\
\frac{5/3+9}{5/3+1} &= 4 \\
\frac{5/3+27/3}{5/3+3/3} &= 4 \\
\frac{32/3}{8/3} &= 4 \\
\frac{32}{3}\cdot\frac{3}{8} &= 4 \\
\frac{32}{8} &= 4 \\
4 &= 4.
\end{aligned}$$

Concluimos que el conjunto solución a la ecuación radical es $\{25/9\}$.

Notas en lógica básica

En estas notas trabajaremos con lógica básica. Empezamos con argumentos. Todos hemos utilizados argumentos en nuestra vida cotidiana. Algunas veces los usamos en filosofía, otras veces en las ciencas naturales, también en las humanidades y como también en la vida común con la familia y amigos. Argumentos son las herramientas que usamos para convencer a alguna persona de nuestro punto de vista.

La lógica es el estudio de estas herramientas para determinar diferenias entre argumentos válidos y argumentos inválidos, o sea, aquellos para los cuales vale la pena razonar y aquellos para los cuales no vale la pena.

Definición 1.1. Un enunciado es una oración declarativa que es cierta o falsa, pero no ambos.

Cuando analizamos enunciados, una de las primeras cosas que notamos es que algunos enunciados son simples, mientras otros son compuestos.

Definición 1.2. Un enunciado simple es un enunciado que tiene un solo sujeto, un solo predicado y no puede ser una combinación de otros enunciados con el uso de conectivas como “no”, “y”, “o”, “si-entonces” y “si y solo si”. Tales enunciados son indivisibles.

Ejemplo 1.3. Algunos ejemplos.

1. $\sqrt{2}$ es irracional.

2. El número π es irracional.

3. Batman es un superhéroe.

4. $2 + 1$ es 8.

Definición 1.4. Un enunciado compuesto es un enunciado que consiste de una combinación de enunciados simples unidos por uno o más conectivas.

Ejemplo 1.5. Algunos ejemplos.

1. Batman es un superhéroe y no puede volar.

2. El cuadrado de un entero es impar si y solo si el entero es impar.

3. Si $\sqrt{2}$ es irracional, entonces no puede escribirse como un decimal repetitivo.

Los siguientes ejemplos no son enunciados.

Ejemplo 1.6. Algunos ejemplos.

1. Esta oración es falsa.

2. $x + 7 = 3x$.

De la misma manera que en Álgebra uno utiliza variables para denotar números y símbolos como "+" para denotar operaciones y paréntesis para eliminar ambigüedades, también en lógica usamos variables para denotar enunciados, varios símbolos para denotar conectivas, sus operaciones y paréntesis para eliminar ambigüedades.

Definición 1.7. Símbolos como "p", "q" y "r", etc. se llaman variables de enunciados y pueden simbolizar arbitrariamente enunciados simples.

Definición 1.8. Las conectivas que son usadas para formar enunciados compuestos están dados en la siguiente tabla.

Negación	*no*	$\neg$
Conjunción	*y*	$\wedge$
Disyunción	*ó*	$\vee$
Condicional	*si* $\cdots$, entonces	$\longrightarrow$
Bicondicional	*si y solo si*	$\longleftrightarrow$

Definición 1.9. Una expresión es una secuencia finita de variables de enunciados y conectivas.

Ejemplo 1.10. Algunos ejemplos.

1. Batman es un superhéroe y no puede volar.

   Sea p el enunciado "Batman es un superhéroe" y q es el enunciado "puede volar". Entonces el enunciado "Batman es un superhéroe y no puede volar" puede escribirse como $p \wedge (\neg q)$.

2. Si $\sqrt{2}$ es irracional, entonces no puede escribirse como un decimal repetitivo.

   Sea p el enunciado "$\sqrt{2}$ es irracional" y q es el enunciado "puede escribirse como un decimal repetitivo". Entonces el enunciado "Si $\sqrt{2}$ es irracional, entonces no puede escribirse como un decimal repetitivo" puede escribirse como $p \longrightarrow (\neg q)$.

3. Hoy está caliente, pero no está soleado.

   Sea p el enunciado "hoy está caliente" y q es el enunciado "hoy está soleado". Entonces el enunciado "Hoy está caliente, pero no está soleado" puede escribirse como $p \wedge (\neg q)$.

4. Tomaré el curso de Física o el curso de Biología.

   Sea p el enunciado "tomar el curso de Física" y q es el enunciado "tomar el curso de Biología". Entonces el enunciado "Tomaré el curso de Física o el curso de Biología" puede escribirse como $p \vee q$.

Considere ahora el enunciado condicional $p \longrightarrow q$. El enunciado p se llama hipótesis, mientras el enunciado q se llama conclusión. Este enunciado se considera cierto si no es el caseo que p es cierto y q es falso. En tal caso, i.e. p cierto y q falso, entonces decimos que el enunciado es falso.

Definición 1.11. Una tabla de veracidad de un enunciado es una tabla con filas y columnas etiquetadas por los componentes del enunciado seguido por el enunciado como tal. En la tabla, cada fila exibe valores ciertos o falsos de los componentes del enunciado, mientras las columnas exiben valores ciertos o falsos del componente en cuestión.

Ejemplo 1.12. Algunos ejemplos.

1. La tabla de veracidad del enunciado $\neg p$ es

p	$\neg p$
C	F
F	C

2. La tabla de veracidad del enunciado $p \vee q$ es

p	q	$p \vee q$
C	C	C
C	F	C
F	C	C
F	F	F

3. La tabla de veracidad del enunciado $p \wedge q$ es

p	q	$p \wedge q$
C	C	C
C	F	F
F	C	F
F	F	F

4. La tabla de veracidad del enunciado $p \longrightarrow q$ es

p	q	$p \longrightarrow q$
C	C	C
C	F	F
F	C	C
F	F	C

5. La tabla de veracidad del enunciado $p \longleftrightarrow q$ es

p	q	$p \longleftrightarrow q$
C	C	C
C	F	F
F	C	F
F	F	C

6. Construya la tabla de veracidad del enunciado $((p \to q) \wedge (\neg q)) \to (\neg p)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge (\neg q)$	$((p \to q) \wedge (\neg q)) \to (\neg p)$
C	C	F	F	C	F	C
C	F	F	C	F	F	C
F	C	C	F	C	F	C
F	F	C	C	C	C	C