Programa Inmersión, Verano 2024
Notas escritas por Dr. M

Notas del cursos. Basadas en los prontuarios de MATE 3001 y MATE 3171

Clase #12: miércoles, 10 de julio de 2024.

Continuación de lógica básica

Definición 1.1. Un enunciado es una tautología si y solo si el valor del enunciado es siempre cierto. Una tautología es representada por $\mathbf{1}$. Observe que si p es cualquier enunciado, entonces

$$\begin{aligned} p \wedge \mathbf{1} &= p \\ p \vee \mathbf{1} &= \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Un ejemplo incluye $p \vee (\neg p)$.

p	$\neg p$	$p \vee (\neg p)$
C	F	C
F	C	C

Definición 1.2. Un enunciado es una contradicción si y solo si el valor del enunciado es siempre falso. Una contradicción es representada por $\mathbf{0}$. Observe que si p es cualquier enunciado, entonces

$$\begin{aligned} p \wedge \mathbf{0} &= 0 \\ p \vee \mathbf{0} &= p. \end{aligned}$$

Un ejemplo incluye $p \wedge (\neg p)$.

p	$\neg p$	$p \wedge (\neg p)$
C	F	F
F	C	F

Definición 1.3. Un enunciado es una contingencia si y solo si no es una tautología ni tampoco una contracción.

La mayoría de los ejemplos discutidos en la clase anterior son contingencias.

Ejemplo 1.4. Determine cuales de los siguientes enunciados son tautologías y cuales son contingencias.

1. Si yo te quiero, tú me quieres.

2. Va a llover o no va a llover en San Juan el día 3 de julio de 2030.

3. Puede que coma o puede que no.

4. Algunos estudiantes se aburren con la lógica.

Hay ocasiones en las cuales queremos reemplazar un enunciado con uno lógicamente equivalente. La siguiente definición nos indica cuando dos enunciados son equivalentes.

Definición 1.5. Dos enunciados p y q son equivalentes si y solo si $p \longleftrightarrow q$ es una tautología. En este caso, escribimos $p \equiv q$.

Ejemplo 1.6. Construya la tabla de veracidad de los siguientes enunciados.

1. $(\neg p) \wedge (\neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
C	C	F	F	F
C	F	F	C	F
F	C	C	F	F
F	F	C	C	C

2. $p \to (q \to r)$

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$
C	C	C	C	C
C	C	F	F	F
C	F	C	C	C
C	F	F	C	C
F	C	C	C	C
F	C	F	F	C
F	F	C	C	C
F	F	F	C	C

3. $(p \wedge q) \to r$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$
C	C	C	C	C
C	C	F	C	F
C	F	C	F	C
C	F	F	F	C
F	C	C	F	C
F	C	F	F	C
F	F	C	F	C
F	F	F	F	C

Las tablas de veracidad se pueden utilizar para identificar tautologías. A continuación, algunos ejemplos.

Ejemplo 1.7. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son tautologías?

1. $(p \to q) \to p$

   Solución: Observe que

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \to p$
C	C	C	C
C	F	F	C
F	C	C	F
F	F	C	F

   Concluimos que $(p \to q) \to p$ no es una tautología.

2. $(q \vee r) \to ((\neg r) \to q)$

   Solución: Observe que

q	r	$\neg r$	$q \vee r$	$(\neg r) \to q$	$(q \vee r) \to ((\neg r) \to q)$
C	C	F	C	C	C
C	F	C	C	C	C
F	C	F	C	C	C
F	F	C	F	F	C

   Concluimos que el enunciado $(q \vee r) \to ((\neg r) \to q)$ es una tautología.

Note que las tablas de veracidad son útiles cuando trabajamos con pocos enunciados. Ahora bien, el número de filas en estas tablas crece exponencialmente con relación a la cantidad de enunciados. Por ejemplo, si un enunciado compuesto depende de un solo enunciado simple, entonces la tabla tendrá solo 2 filas. Si el enunciado compuesto depende de dos enunciados simples, entonces la tabla tendrá 4 filas. Si el enunciado compuesto depende de 3 enunciados simples, entonces la tabla tendrá 8 filas. En general, si el enunciado compuesto depende de n enunciados simples, entonces la tabla de veracidad tendrá 2^n filas. Por lo tanto, es imperativo encontrar formas alternas de demostrar la veracidad de argumentos. Las siguientes tautologías toman un rol central a la hora de demostrar que algunos argumentos son válidos utilizando razonamiento deductivo. Eventualmente, ellas van a ser utilizadas como reglas de inferencia.

1. Regla de adición:
$$p \to p \vee q.$$

2. Regla de simplificación:
$$\begin{aligned} p \wedge q &\to p \\ p \wedge q &\to q. \end{aligned}$$

3. Silogismo disyuntivo:
$$(p \vee q) \wedge (\neg p) \to q.$$

4. Resolución:
$$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \leftrightarrow (q \vee r).$$

5. Doble negación:
$$\neg(\neg p) \leftrightarrow p.$$

6. Reglas de conmutatividad:
$$\begin{aligned} p \wedge q &\leftrightarrow q \wedge p \\ p \vee q &\leftrightarrow q \vee p. \end{aligned}$$

7. Reglas de idempotencia:
$$\begin{aligned} p \wedge p &\leftrightarrow p \\ p \vee p &\leftrightarrow p. \end{aligned}$$

8. Regla de contrapositivo:
$$(p \to q) \leftrightarrow ((\neg q) \to (\neg p)).$$

9. Leyes de DeMorgan:
$$\begin{aligned} \neg(p \wedge q) &\leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q)) \\ \neg(p \vee q) &\leftrightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q)). \end{aligned}$$

10. Regla de distribución:
$$\begin{aligned} (p \wedge (q \vee r)) &\leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \\ (p \vee (q \wedge r)) &\leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)). \end{aligned}$$

11. Regla de la transitividad:

$$\begin{aligned} ((p \to q) \wedge (q \to r)) &\quad\leftrightarrow\quad (p \to r) \\ ((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)) &\quad\leftrightarrow\quad (p \leftrightarrow r). \end{aligned}$$

12. Modus ponens (MP):

$$((p \to q) \wedge p) \to q$$

13. Modus tolens (MT):

$$((p \to q) \wedge (\neg q)) \to \neg p.$$

14. Contradicción:

$$(p \wedge (\neg p)) \leftrightarrow \mathbf{0}.$$

Ejemplo 1.8. Sin utilizar tabla de veracidad, demuestre que $(\neg p) \to (p \to q)$ es una tautología.

Demostración: Note que $(\neg p) \to (p \to q) \iff p \vee (p \to q) \iff p \vee ((\neg p) \vee q) \iff (p \vee (\neg p)) \vee q \iff \mathbf{1} \vee q = \mathbf{1}$. □

Argumentos válidos

Definición 1.9. Un argumento es una secuencia de enunciados llamados premisas y al final, un enunciado llamado concluisión.

Definición 1.10. Un argumento en forma es una secuencia de enunciados en forma lógica llamados premisas y un enunciado final en forma lógica llamado conclusión.

Representamos un argumento en forma de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{P}_n \\ \hline \mathcal{C} \end{array}$$

Ejemplo 1.11. Considere el siguiente argumento. *Si Batman es un superhéroe, entonces Batman batalla en contra de las fuerzas del mal. Batman es un superhéroe. Por lo tanto, Batman batalla en contra de las fuerzas del mal.* ¿Es éste un argumento válido?

Solución: Muy probablemente su intuición le dice que sí. Ahora bien, nuestra intuición a veces nos falla, así que escribamos este argumento en forma lógica y tratemos de evaluar su validez. Para esto, sea p y q los siguientes enunciados:

p : Batman es un superhéroe.
q : Batman batalla en contra de las fuerzas del mal.

Note ahora que nuestro argumento tiene la forma

$$\begin{array}{c} p \to q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Ahora es claro que si p implica q y tenemos que p es cierto, entonces tendremos q, así que el argumento es válido (modus ponens). Si aún no está convencido, entonces mire la tabla de veracidad:

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$((p \to q) \wedge p) \to q$
C	C	C	C	C
C	F	F	F	C
F	C	C	F	C
F	F	C	F	C

Ejemplo 1.12. Considere el siguiente argumento. *Si Socrates es un mito, entonces Socrates es un dios del olimpo. Socrates es un mito. Por lo tanto, Socrates es un dios del olimpo.* ¿Es éste un argumento válido?

Solución: ¿Qué dice su intuición? Escribamos este argumento en forma lógica y tratemos de evaluar su validez. Para esto, sea p y q los siguientes enunciados:

p : Socrates es un mito.
q : Socrates es un dios del olimpo.

Note ahora que nuestro argumento tiene la forma

$$\begin{array}{c} p \to q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Este es exactamente el argumento del ejemplo anterior, por lo tanto sabemos que es válido.

Ejemplo 1.13. Considere el siguiente argumento. *Si Socrates es un filósofo, entonces Socrates estudia la validez de argumentos. Socrates estudia la validez de argumentos. Por lo tanto, Socrates es un filósofo.* ¿Es éste un argumento válido?

Solución: ¿Qué dice su intuición en este caso? Escribamos este argumento en forma lógica para poder evaluar su validez. Para esto, sea p y q los siguientes enunciados:

p : Socrates es un filosofo.
q : Socrates estudia la validez de argumentos.

Note ahora que nuestro argumento tiene la forma

$$\begin{array}{c} p \to q \\ q \\ \hline p \end{array}$$

Observe que es dificil demostrar la validez de este argumento usando las reglas de inferencias de arriba. La razón es bien sencilla, el argumento es inválido. Para esto, considere la tabla de veracidad.

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge q$	$((p \to q) \wedge q) \to p$
C	C	C	C	C
C	F	F	F	C
F	C	C	C	F
F	F	C	F	C

Ejemplo 1.14. Verifique la validez del siguiente argumento:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ (\neg p) \vee r \\ (\neg r) \vee s \\ \hline q \vee s \end{array}$$

Solución: Note que si $p \vee q$ y $(\neg p) \vee r$ son ambos ciertos, entonces por resolución tenemos $q \vee r$. Por lo tanto, nuestro argumento se reduce a

$$\begin{array}{c} q \vee r \\ (\neg r) \vee s \\ \hline q \vee s. \end{array}$$

Pero si $q \vee r$ y $s \vee (\neg r)$ son ciertos, entonces, de nuevo por resolución tenemos que $q \vee s$. Por lo tanto, el argumento es válido. □

Ejemplo 1.15. Verifique la validez del siguiente argumento:

$$\begin{array}{c} p \to q \\ (\neg r) \vee (\neg q) \\ r \\ \hline \neg p \end{array}$$

Solución: Tome la segunda hipótesis

$$(\neg r) \vee (\neg q).$$

Por conmutatividad, tenemos que

$$(\neg r) \vee (\neg q) \leftrightarrow (\neg q) \vee (\neg r).$$

Ahora, sabemos que $(\neg q) \vee (\neg r)$ es equivalente a $q \to (\neg r)$. Por lo tantos, nuestras dos primeras hipótesis son

$$\begin{array}{ccc} p & \to & q \\ q & \to & (\neg r). \end{array}$$

Aplique la regla de transitividad para obtener $p \to (\neg r)$. Por lo tanto, nuestras hipótesis (premisas) y argumento se resumen en

$$\begin{array}{c} p \to (\neg r) \\ \underline{\quad r \quad} \\ \neg p \end{array}$$

Finalmente, si $p \to (\neg r)$ es cierto y r es cierto, entonces tenemos $\neg p$ (modus tolens). Concluimos que nuestro argumento es válido.

Ejemplo 1.16. Varifique la validez de los siguientes argumentos.

1. Lógica es dificil o no a muchos estudiantes le gusta. Si Matemáticas es fácil, entonces Lógica no es dificil. Por lo tanto, si a muchos estudiantes le gusta la Lógica, entonces Matemáticas no es fácil.

   Solución: Sea

p :	Lógica es dificil.
q :	A muchos estudiantes le gusta la Lógica.
r :	Matemáticas es fácil.

   Nuestro argumento tiene la forma

   $$\begin{array}{c} p \vee (\neg q) \\ \underline{r \to (\neg p)} \\ q \to (\neg r) \end{array}$$

   Por conmutatividad, tenemos que $p \vee (\neg q) \equiv (\neg q) \vee p$. También, recuerde que

   $$(\neg q) \vee p \equiv q \to p.$$

   Ahora bien, por contrapositivo, tenemos que

   $$\begin{aligned} r \to (\neg p) &\equiv \neg(\neg p) \to (\neg r) \\ &\equiv p \to (\neg r). \end{aligned}$$

   Por lo tanto, nuestro argumento es equivalente al siguiente argumento

   $$\begin{array}{c} q \to p \\ \underline{p \to (\neg r)} \\ q \to (\neg r) \end{array}$$

   Finalmente, note que la Regla de la Transitividad nos dice que este último argumento es válido.

2. Luis es electo presidente de la Junta de Condómines o ambos Pedro y María son electos vicepresidentes de la Junta. Si Luis es electo president o Pedro es electo vicepresidente de la Junta, entonces Carlos va a entablar una protesta. Por lo tanto, Luis es electo presidente de la Junta o Carlos entabla una protesta.

Solución: Sea

p :	Luis es electo presidente de la Junta.
q :	Pedro es electo vicepresidente de la Junta.
r :	María es electa vicepresidente de la Junta.
s :	Carlos entabla una protesta.

Nuestro argumento tiene la forma

$$\begin{array}{c} p \vee (q \wedge r) \\ (p \vee q) \to s \\ \hline p \vee s \end{array}$$

Utilice distribución en la primera premisa para obtener

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

Ahora, si tenemos

$$(p \vee q) \wedge (p \vee r),$$

entonces definitivamente tenemos $p \vee q$. Por lo tanto, ahora tenemos el siguiente argumento

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ (p \vee q) \to s \\ \hline p \vee s \end{array}$$

Las dos premisas de este argumento nos dicen

$$(p \vee q) \wedge ((p \vee q) \to s),$$

el cual, por modus ponens, nos dice que tenemos s. Finalmente, por adición sabemos que $s \to (p \vee s)$. Concuimos que el argumento es válido.

Definición 1.17. Un argumento sólido es un argumento válido para el cual todas las premisas (hipótesis) son ciertas. De lo contrario, decimos que el argumento no es sólido.

Observe que el Ejemplo 1.11 es un argumento sólido, mientras el Ejemplo 1.12 no lo es.