Programa Inmersión, Verano 2024
Notas escritas por Dr. M

Notas del cursos. Basadas en los prontuarios de MATE 3001 y MATE 3171

Clase #13: jueves, 11 de julio de 2024.

1 Ecuaciones, desigualdades y modelaje

1.3 Ecuaciones y gráficas en dos variables

En esta sección, como parte de la discusión, se consideran ecuaciones lineales y sus gráficas. Este tema fue discutido anteriormente en algunas secciones que corresponden al curso MATE 3001 (vea lecturas 7 y 10), por lo tanto, no discutiremos como graficar estas ecuaciones en el plano. Sin embargo, en esta sección reforzaremos algunas propiedades que, o se discutieron brevemente anteriormente, o que simplemente no se discutieron.

Recuerde que el varlor absoluto de un número real a está definido por

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

También recuerde que el valor absoluto puede utilizarse para conseguir la distancia entre de dos reales en la recta real. Por ejemplo, si consideramos los reales -3 y 5 en la recta real, obtenemos: Observe que estos puntos están a ocho unidades de

distancia. Este valor de la distancia lo podemos recuperar con el valor absoluto. En particular, observe que

$$|-3-5| = |-8| = 8.$$

De igual manera,

$$|5-(-3)| = |8| = 8.$$

Esto útimo se puede interpretar como sigue: la distancia entre -3 y 5 es la misma que la distancia entre 5 y -3. Esto último es lo que queremos, pues la distancia entre dos números debe ser la misma, independientemente si empezamos a medir desde un número o el otro. En general, tenemos que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$|a-b| = |b-a|.$$

Ahora bien, dado dos reales a y b, ¿podemos escribir, de forma explicita (en términos de a y b) el punto medio entre ambos? Por ejemplo, si observamos la recta anterior, aquella donde pusimos el -3 y 5, podemos ver que 1 es el punto que está entre -3 y 5. Observe que

$$1 = \frac{(-3)+5}{2}.$$

Esto último no es casualidad, en realidad tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.3.1. Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces el punto medio entre a y b es $\dfrac{a+b}{2}$.

Demostración: Note que para demostrar que $(a+b)/2$ es el punto medio, tenemos que demostrar que la distancia entre él y a y la distancia entre él y b tiene que ser la misma. Ahora bien, note que

$$\left|a - \frac{a+b}{2}\right| = \left|\frac{2a}{2} - \frac{a+b}{2}\right| = \left|\frac{a-b}{2}\right| = \frac{|a-b|}{2},$$

mientras

$$\left|b - \frac{a+b}{2}\right| = \left|\frac{2b}{2} - \frac{a+b}{2}\right| = \left|\frac{b-a}{2}\right| = \frac{|b-a|}{2}.$$

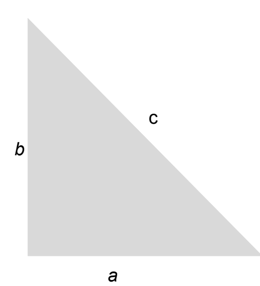
Como $|a-b| = |b-a|$, entonces la distancia entre $(a+b)/2$ y a y la distancia entre $(a+b)/2$ y b es la misma. Concluimos que $(a+b)/2$ es el punto medio entre a y b.$\square$

Distancia en el Plano Cartesiano

Ya tenemos la noción de distancia en la recta real, esto es, si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces la distancia entre ambos números es $|a-b|$. Ahora bien, dado dos pares ordenados (x_1, y_1) y (x_2, y_2), ¿podemos encontrar un fórmula para la distancia entre ellos? La respuesta es SÍ.

La fórmula que vamos a obtener depende de un teorema clásico en la geometría: Teorema de Pitágoras.

Teorema 1.3.2 (Pitágoras)**.** El siguiente triángulo es recto si y solo si $a^2 + b^2 = c^2$.



En estas notas no demostraremos el Teorema de Pitágoras, más bien lo tomaremos como conocimiento común. Si quiere ver una demostración del teorema, entonces lo invito revisar algún libro de goemetría.

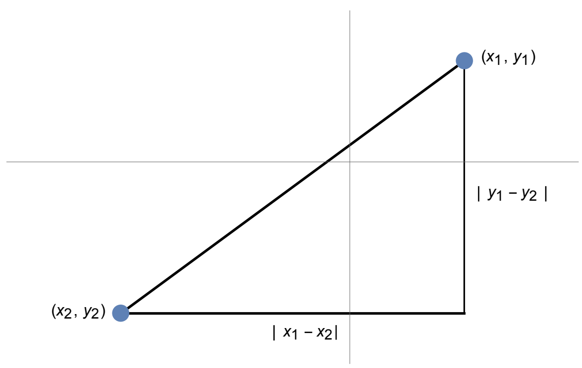
Ejemplo 1.3.3. Suponga que un triángulo recto es tal que su base mide 5 cm, mientras su hipotenusa mide 13 cm. Encuentre la medida del cateto que falta.

Solución: Sea x la medida del cateto que falta. Por Pitágoras, sabemos que

$$\begin{aligned} 5^2 + x^2 &= 13^2 \\ 25 + x^2 &= 169 \\ x^2 &= 169 - 25 \\ x^2 &= 144 \\ x &= \sqrt{144} = 12. \end{aligned}$$

Concluimos que el cateto que falta mide 12 cm.

Regresemos al problema de la distancia de dos puntos en el plano. Suponga que tenemos los pares ordenados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano Cartesiano. Note que si los graficamos, tenemos la siguiente figura.



Note sabemos las medidas de los catetos, esto es, uno mide $|x_1 - x_2|$, mientras el otro mide $|y_1 - y_2|$. Por lo tanto, para encontrar el largo de la hipotenusa (la hipotenusa representa la distancia entre los dos puntos) utilizamos el Teorema de Pitágoras. Sea d este largo. Note que tenemos la siguiente relación

$$\begin{aligned} d^2 &= |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2. \end{aligned}$$

(Note que podemos sacar el símbolo de valor absoluto, pues un número al cuadrado es no-negativo). Ahora, sacamos raíces cuadradas a ambos lados (la expresión de la derecha es no-negativa, así que esto se puede hacer) para obtener

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

(Note que escogimos la raíz positiva, la distancia tiene que ser positiva). Por lo tanto, concluimos que

Teorema 1.3.4. La distancia en el plano entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Ejemplo 1.3.5. Algunos ejemplos.

1. Encuentre la distancia entre los puntos $(5, -3)$ y $(-1, 6)$.

   Solución: La distancia está dada por

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(5-(-1))^2 + (-3-6)^2} \\ &= \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{36 + 81} \\ &= \sqrt{117} = \sqrt{9 \cdot 13} \\ &= 3\sqrt{13}. \end{aligned}$$

2. Encuentre la distancia entre los puntos $(\pi/2, 0)$ y $(\pi/3, 1)$.

   Solución: La distancia está dada por

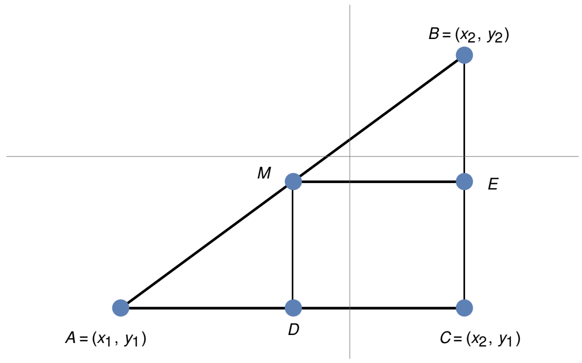
$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)^2 + (0-1)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3\pi}{6} - \frac{2\pi}{6}\right)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + 1} \\ &= \sqrt{\frac{\pi^2}{36} + 1} = \sqrt{\frac{\pi^2 + 36}{36}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi^2 + 36}}{6}. \end{aligned}$$

Suponga ahora que queremos calcular el punto medio entre dos pares ordenados (x_1, y_1) y (x_2, y_2). De forma similar a la recta real, el punto medio entre dos pares ordenados está dado por

Teorema 1.3.6. El punto medio del segmento de línea con puntos terminales (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Demostración: Conecte los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) con un segmento de línea, como se ve en la figura que está en el tope de la próxima página. Sea M el punto del medio del segmento $\overline{AB}$. Dibuje un segmento de línea vertical y otro horizontal que forman tres triángulos como en la figura que está en el tope de la próxima página. Como M es el punto medio de $\overline{AB}$, los dos triángulos pequeños son congruentes. Por lo tanto,



el D es el punto medio de $\overline{AC}$ y E es el punto medio de $\overline{BC}$. Como el punto medio de una línea se obtiene sumando los puntos terminales y dividiendo por dos, entonces el punto medio D es $(x_1 + x_2)/2$ y de igual forma, el punto medio E es $(y_1 + y_2)/2$. Concluimos que el punto medio M tiene coordenadas

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Ejemplo 1.3.7. Algunos ejemplos.

1. Encuentre el punto medio entre los puntos $(5, -3)$ y $(-1, 6)$.

   Solución: Note que el punto medio está dado por

   $$M = \left(\frac{5 + (-1)}{2}, \frac{-3 + 6}{2} \right) = \left(\frac{4}{2}, \frac{3}{2} \right) = \left(2, \frac{3}{2} \right).$$

2. Encuentre el punto medio entre los puntos $(\pi/2, 0)$ y $(\pi/3, 1)$.

   Solución: Note que el punto medio está dado por

   $$M = \left(\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}}{2}, \frac{0 + 1}{2} \right) = \left(\frac{\frac{5\pi}{6}}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{1}{2} \right).$$

Círculos

Un círculo es el conjunto de todos los puntos en el plano que están a una distancia fija de un punto dado. La distancia fija se llama *radio* y usualmente está denotada por r. El punto dado (del cual todos los puntos están a la distancia r) se llama el centro del círculo.

Sea (h, k) las coordenadas del centro del círculo. Entonces, el punto (x, y) está en el círculo si su distancia con respecto a (h, k) es r, en otras palabras, si satisface la ecuación

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r.$$

Como ambos lados de esta ecuación son positivos, entonces podemos cuadrarlos para obtener la siguiente ecuación (llamada la forma estándar del círculo).

Teorema 1.3.8 (Ecuación estándar de un círculo)**.** La ecuación para un círculo con centro (h, k) y radio $r > 0$ es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

Un círculo centrado en el origen tiene ecuación $x^2 + y^2 = r^2$.

Ejemplo 1.3.9. Grafique el círculo con ecuación $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$.

Solución: Observe que el radio de este círculo está dado por $r = 3$. Encontremos ahora el centro. Note que como la ecuación está escrita de forma estándar, entonces el centro es fácil de determinar

$$\begin{aligned} (x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 &= 9 \\ (x-1)^2 + (y-(-2))^2 &= 3^2, \end{aligned}$$

i.e. está dado por $(1, -2)$. Para dibujar dibujar el círculo, primero localice los puntos en el círculo que corresponden a los puntos cardinales N, S, E, O. Estos puntos son fáciles de localizar. El que corresponde al norte (N) es aquel punto con la misma coordenada de x que el centro, pero cuya coordenda de y es r más que la coordenada de y del centro. En este caso, el punto

$$N = (1, -2+3) = (1, 1).$$

El punto que corresponde al sur es es aquel con la misma coordenada de x que el centro, pero cuya coordenda de y es la coordenada de y del centro menos r. En este caso, el punto

$$S = (1, -2-3) = (1, -5).$$

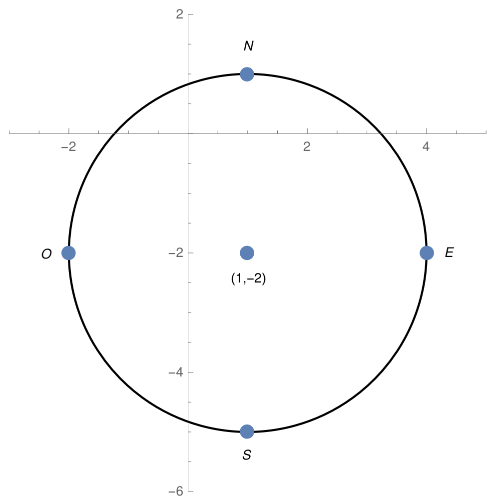
El que corresponde al este es aquel punto con la misma coordenada de y que el centro, pero cuya coordenda de x es r más que la coordenada de x del centro. En este caso, el punto

$$E = (1+3, -2) = (4, -2).$$

Finalmente, el punto que corresponde al sur es es aquel con la misma coordenada de y que el centro, pero cuya coordenda de x es la coordenada de x del centro menos r. En este caso, el punto

$$O = (1-3, -2) = (-2, -2).$$

Una vez estén estos puntos localizados, grafíquelos en el plano y trate de conectarlos con una circunferencia (vea la próxima figura).



Ejemplo 1.3.10. Escriba la ecuación estándar del cículo con centro $(-3, 5)$ que pasa por el punto $(1, 8)$.

Solución: Primero encontraremos el radio de este círculo. Para esto, note que

$$r \;=\; \sqrt{(-3-1)^2 + (5-8)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$

También note que en este caso $h = -3$ y $k = 5$. Concluimos que la ecuación de este círculo está dada por

$$\begin{aligned}(x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\ (x-(-3))^2 + (y-5)^2 &= 5^2 \\ (x+3)^2 + (y-5)^2 &= 25.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.11. Escriba la ecuación estándar del cículo con la propiedad de que $(2, 3)$ corresponde al punto que está directamente al sur del centro y $(2, 7)$ corresponde al punto que está directamente al norte del centro.

Solución: Primero encontraremos el centro de este círculo. Observe que, dadas las hipótesis, el centro es exactamente el punto medio entre los puntos $(2, 3)$ y $(2, 7)$. Utilizando la fórmula del punto medio, encontramos que el centro está dado por

$$\text{centro} = (h, k) = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{3+7}{2}\right) = (2, 5).$$

Ahora encontraremos el radio. Para esto, buscamos la distancia entre el centro y cualesquiera de los dos puntos que nos dieron. En este caso, escogemos el punto $(2, 3)$. Entonces,

$$\text{radio} = r \;=\; \sqrt{(2-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Concluimos que la ecuación de este círculo está dada por

$$\begin{aligned}(x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\ (x-2)^2 + (y-5)^2 &= 2^2 \\ (x-2)^2 + (y-5)^2 &= 4.\end{aligned}$$

Un círculo se puede escribir de forma no estándar. Por ejemplo, considere el círculo (forma estándar)

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 4.$$

Este círculo también se puede escribir de la sguiente forma

$$x^2 + 6x + y^2 - 10y = -30.$$

Claro está, dada esta última forma, es díficil identificar que es un círculo. Más aún, ¿cuál es su centro? ¿Cuál es su radio? Por lo tanto, preferimos la forma estándar, pues estas preguntas se pueden contestar fácilmente si tenemos la ecuación del círculo escrita en esa forma.

Ahora, dado un círculo escrito de forma similar a

$$x^2 + 6x + y^2 - 10y = -30,$$

¿cómo recuperar la ecuación de la forma estándar? Para contestar esta pregunta, trabajaremos con la técnica de completar el cuadrado.

Completar el cuadrado significa encontrar un tercer término de un trinomio que es un cuadrado perfecto dado los primeros dos términos de este. Para lograr esto, suponga que tenemos x^2+bx y queremos encontrar el tercer termino tal que al sumarlo a $x^2 + bx$ obtenemos un cuadrado perfecto. Observe que

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Por lo tanto, si sumamos $(b/2)^2$ a $x^2 + bx$, entonces obtenemos un cuadrado perfect. Por ejemplo, suponga que queremos completar el cuadrado de $x^2 + 6x$. En este caso, $b = 6$, por lo tanto,

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9.$$

Concluimos que si sumamos 9 a $x^2 + 6x$, obtenemos un cuadrado perfecto, i.e.

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2.$$

Ejemplo 1.3.12. Algunos ejemplos de la técnica de completar el cuadrado.

1. Complete el cuadrado de $x^2 + 11x$.

   Solución: Note que $b = 11$ y por lo tanto, $(b/2)^2 = (11/2)^2 = 121/4$. Por lo tanto,

   $$x^2 + 11x + \frac{121}{4} = \left(x + \frac{11}{2}\right)^2.$$

2. Complete el cuadrado de $x^2 + 24x$.

   Solución: Note que $b = 24$ y por lo tanto, $(b/2)^2 = (24/2)^2 = 12^2 = 144$. Por lo tanto,

   $$x^2 + 24x + 144 = (x+12)^2.$$

Ya que tenemos la técnica de completar el cuadrado, ahora veremos como utilizarla para recuperar la ecuación de un círculo en forma estándar. Retomemos el caso en el cual el círculo estaba escrito como

$$x^2 + 6x + y^2 - 10y = -30.$$

Lo primero que vamos a hacer es completar el cuadrado de x^2+6x. Este problema lo resolvimos anteriormente y se lograba a/ nadiendole 9 a x^2+6x. Ahora, completemos el cuadrado de $y^2 - 10y$. Para esto, note que en este caso $b = -10$ y por lo tanto, debemos a/ nadirle a $y^2 - 10y$ el término $(b/2)^2 = (-10/2)^2 = (-5)^2 = 25$ para obtener

$$y^2 - 10y + 25 = (x - 5)^2.$$

Ya que completamos los cuadrados, ahora añada ambas constantes, i.e. 9 y 25 a la ecuación $x^2 + 6x + y^2 - 10y = -30$ para obtener

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + y^2 - 10y &= -30 \\ x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 &= -30 + 9 + 25 \\ (x+3)^2 + (y-5)^2 &= -30 + 34 \\ (x+3)^2 + (y-5)^2 &= 4. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.13. Encuentre la ecuación en forma estándar del círculo

$$x^2 + 8x + y^2 - 5y = -\frac{1}{4}.$$

Identifique el radio y el centro del círculo.
Solución: Primero buscamos las constantes que completan los cuadrados. Éstas son

$$\begin{aligned} \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 4^2 &= 16, \quad \text{para } x^2 + 8x \\ \left(\frac{-5}{2}\right)^2 &= \frac{25}{4}, \quad \text{para } y^2 - 5y. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x^2 + 8x + y^2 - 5y &= -\frac{1}{4} \\ x^2 + 8x + 16 + y^2 - 5y + \frac{25}{4} &= -\frac{1}{4} + 16 + \frac{25}{4} \\ (x+4)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 &= -\frac{1}{4} + \frac{64}{4} + \frac{25}{4} \\ (x+4)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{88}{4} \\ (x+4)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 &= 22. \end{aligned}$$

Concluimos que el centro es $\left(-4, \frac{5}{2}\right)$, mientras el radio del círculo está dado por $r = \sqrt{22}$.