Programa Inmersión, Verano 2024
Notas escritas por Dr. M

Notas del cursos. Basadas en los prontuarios de MATE 3001 y MATE 3171

Clase #14: viernes, 12 de julio de 2024.

1 Ecuaciones, desigualdades y modelaje

1.7 Ecuaciones cuadráticas

Anteriormente trabajamos con soluciones a problemas de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mediante el proceso de factorización. Ahora bien, las técnicas estudiadas aplicaban solo cuando el polinomio era reducible sobre los enteros. Esto no siempre es el caso. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 - x - 1 = 0$$

no se puede resolver con los métodos discutidos anteriormente. La razón principal es que este polinomio es irreducible sobre los enteros. Más aún, el conjunto solución a este problema (pronto veremos como obtenerlo) es

$$\left\{ \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right), \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) \right\}.$$

Por cierto, el número $(1 + \sqrt{5})/2$ es conocido como la "Razón Dorada" ("Golden Ratio" en inglés). Les invito a buscar información de este número.

Dada la discusión de arriba, la pregunta natural ahora es: ¿Existe algún método para resolver problemas de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$? Agraciadamente, la respuesta es SÍ. En realidad existen varios métodos.

Completar el cuadrado

Una de las técnicas que aprendimos anteriormente (cuando trabajamos con círculos) es el método de completar el cuadrado. Este método es útil para resolver ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, considere el problema

$$\begin{aligned} x^2 - x - 1 &= 0 \\ x^2 - x &= 1. \end{aligned}$$

Observe que utilizando el método de completar el cuadrado de $x^2 - x$ (vea notas de la lectura #13), obtenemos que

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Ahora, tome la ecuación original y añada la constante 1/4 a ambos lados (la que completa el cuadrado) para obtener

$$\begin{aligned} x^2 - x &= 1 \\ x^2 - x + \frac{1}{4} &= 1 + \frac{1}{4} \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{5}{4} \\ x - \frac{1}{2} &= \pm\sqrt{\frac{5}{4}} \\ x &= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Note que éstas son las soluciones mencionadas anteriormente.

Ejemplo 1.7.1. Encuentre el conjunto solución para las siguientes ecuaciones.

1. $x^2 + 6x + 7 = 0$.

   Solución: Note que tenemos la ecuación

   $$x^2 + 6x = -7.$$

   Observe que 9 completa el cuadrado de la expresión en la izquierda. Entonces,

   $$\begin{aligned} x^2 + 6x &= -7 \\ x^2 + 6x + 9 &= -7 + 9 \\ (x+3)^2 &= 2 \\ x + 3 &= \pm\sqrt{2} \\ x &= -3 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$

   Concluimos que el conjunto solución está dado por $\{-3 - \sqrt{2}, -3 + \sqrt{2}\}$.

2. $2x^2 - 3x - 4 = 0$.

   Solución: Primero observe que nuestra ecuación es equivalente a la ecuación (divida por 2 todas las expresiones)

   $$\begin{aligned} x^2 - \frac{3}{2}x - 2 &= 0 \\ x^2 - \frac{3}{2}x &= 2. \end{aligned}$$

Observe que, completando el cuadrado, obtenemos

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}
x^2 - \frac{3}{2}x &= 2 \\
x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} &= 2 + \frac{9}{16} \\
\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 &= \frac{32}{16} + \frac{9}{16} \\
x - \frac{3}{4} &= \pm\sqrt{\frac{41}{16}} \\
x &= \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{41}}{4} \\
x &= \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}.
\end{aligned}$$

Concluimos que el conjunto solución está dado por $\left\{\frac{3+\sqrt{41}}{4}, \frac{3-\sqrt{41}}{4}\right\}$.

Resumen:

Para utilizar el método de completar el cuadrado, haga lo siguiente:

1. Si el coeficiente de x no es 1, divida toda la ecuación por este coeficiente.
2. Escriba la ecuación en la forma $x^2 + bx = d$.
3. Complete el cuadrado de $x^2 + bx$ añadiendo $(b/2)^2$ a ambos lados de la ecuación.
4. Factorice como un cuadrado perfecto el lado izquierdo de la ecuación.
5. Aplique la operación de raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación.
6. Simplifique los resultados y disfrute la vida.

La fórmula cuadrática

El método de completar el cuadrado puede aplicarse a cualquier ecuación cuadratica de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{con } a \neq 0.$$

Ahora bien, ¿podemos encontrar una fórmula que nos permita llegar al resultado sin tener que completar el cuadrado cada vez que encontremos una ecuación cuadrática? La respuesta es sí. Es más, la misma técnica de completar el cuadrado nos la dará. Veamos.

Suponga que tenemos la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Por el momento, considere solo el caso en el cual $a > 0$. Aplique el proceso explicado en el resumen que está en la página 3. Observe que lo primero que tenemos que hacer es dividir por a. Esto nos lleva a la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a}. \end{aligned}$$

El próximo paso es completar el cuadrado de la expresión que está a la mano izquierda añadiendo

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

a ambos lados de la ecuación. Esto último nos lleva a

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ x + \frac{b}{2a} &= \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{note que } \sqrt{4a^2} = 4a, \text{ pues } a > 0 \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

Teorema 1.7.2 (Fórmula cuadrática)**.** Las soluciones a $ax^2 + bx + 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ejemplo 1.7.3. Consideremos los ejemplos anteriores.

1. $x^2 - x - 1 = 0.$

Solución: Note que $a = 1$, $b = -1$ y $c = -1$. Por lo tanto, utilizando la fórmula cuadrática, obtenemos que las soluciones están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

2. $2x^2 - 3x - 4 = 0$.

   Solución: Note que $a = 2$, $b = -3$ y $c = -4$. Por lo tanto, utilizando la fórmula cuadrática, obtenemos que las soluciones están dadas por

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(-4)}}{2(2)} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 32}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.7.4. Otros ejemplos.

1. Encuentre el conjunto solución de $x^2 - 6x + 11 = 0$.

   Solución: Note que $a = 1$, $b = -6$ y $c = 11$. Por lo tanto, utilizando la fórmula cuadrática, obtenemos que las soluciones están dadas por

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(11)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 44}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-8}}{2}.$$

   En este punto tenemos dos opciones. Si nos dicen que encontremos el conjunto solución <u>sobre los reales</u> ($\mathbb{R}$), entonces el conjunto solución es $\emptyset$, pues $\sqrt{-8}$ no es real. Si por el contrario, no nos indican que es sobre los reales, entonces las soluciones están dadas por

$$x = \frac{6 \pm 2i\sqrt{2}}{2} = 3 \pm i\sqrt{2}.$$

   En otras palabras, el conjunto solución es $\{3 - i\sqrt{2}, 3 + i\sqrt{2}\}$.

2. Encuentre el conjunto solución de $4x^2 + 9 = 12x$.

   Solución: Escriba esta ecuación como

$$4x^2 - 12x + 9 = 0.$$

   Note que $a = 4$, $b = -12$ y $c = 9$. Por lo tanto, utilizando la fórmula cuadrática, obtenemos que las soluciones están dadas por

$$\begin{aligned} x &= \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(4)(9)}}{2(4)} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} \\ &= \frac{12 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

   Concluimos que el conjunto solución está dado por $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

3. Encuentre el conjunto solución de $2x^2 - 3x - 2 = 0$.

   Solución: Note que $a = 2$, $b = -3$ y $c = -2$. Por lo tanto, utilizando la fórmula cuadrática, obtenemos que las soluciones están dadas por

$$\begin{aligned} x &= \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-2)}}{2(2)} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}. \end{aligned}$$

   Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{3-5}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

   Concluimos que el conjunto solución es $\left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$.

4. Encuentre el conjunto solución de $x^2 + x + 1 = 0$.

   Solución: Note que $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$. Por lo tanto, utilizando la fórmula cuadrática, obtenemos que las soluciones están dadas por

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

   Concluimos que el conjunto solución está dado por $\left\{\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Observe que en los ejemplos anteriores hemos visto tres posibilidades para las soluciones de una ecuación cuadrática:

1. Dos soluciones reales (ambas ecuaciones en el Ejemplo 1.7.3, ecuación 3 en el Ejemplo 1.7.4).

2. Una solución real única (ecuación 2 en Ejemplo 1.7.4).

3. No hay soluciones reales, pero si dos soluciones complejas (ecuaciones 1 y 4 en el Ejemplo 1.7.4).

Estas tres posibilidades no son una causalidad. En realidad, son las únicas opciones disponibles. Para verificar este hecho, necesitamos la definición del discriminante de una ecuación cuadratica.

Definición 1.7.5. Considere la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. El discriminante asociado a esta ecuación es

$$D(a, b, c) = b^2 - 4ac.$$

Observe que la fórmula cuadrática ahora puede escribirse como

$$\frac{-b \pm \sqrt{D(a,b,c)}}{2a}.$$

Como $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces $D(a,b,c) = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, tenemos tres posibilidades para $D(a,b,c)$.

1. $D(a,b,c) > 0$. En este caso, $\pm\sqrt{D(a,b,c)}$ son dos números reales y por lo tanto tenemos dos soluciones reales para la ecuación cuadrática.

2. $D(a,b,c) = 0$. En este caso, $\pm\sqrt{D(a,b,c)} = \pm\sqrt{0} = 0$. Por lo tanto, tenemos una solución real única.

3. $D(a,b,c) < 0$. En este caso, $\pm\sqrt{D(a,b,c)}$ no son números reales, pero si complejos. Por lo tanto, en este caso tenemos dos soluciones complejas la ecuación cuadrática.

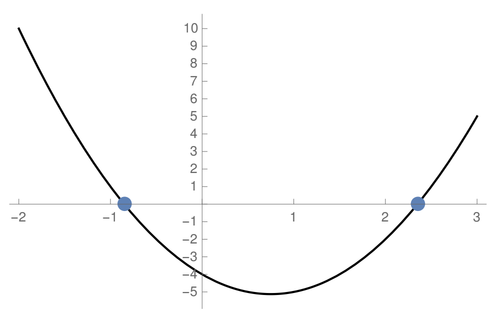
Repasemos otra vez algunos de los ejemplos, pero ahora incluiremos un análisis con el discriminante y con la gráfica de la función cuadrática que aparece en la ecuación.

Ejemplo 1.7.6. Repasemos.

1. Considere la ecuación $2x^2 - 3x - 4 = 0$. Note que el discriminante es

   $$D(2,-3,-4) = (-3)^2 - 4(2)(-4) = 9 + 32 = 41 > 0.$$

   Por lo tanto, tenemos dos soluciones reales. Veamos ahora la representación gráfica. Sea $f(x) = 2x^2 - 3x - 4$. La gráfica de $f(x)$ está dada por

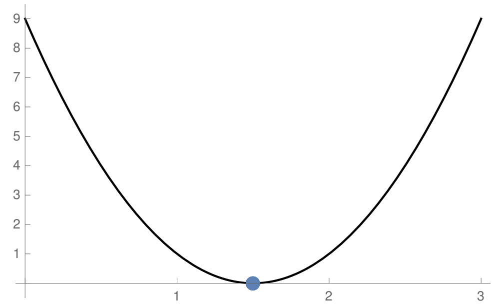
   

   Los puntos donde la gráfica interseca el eje de x son las dos soluciones reales. El punto en la izquierda es $\frac{1}{4}\left(3 - \sqrt{41}\right)$, mientras el punto en la derecha es $\frac{1}{4}\left(3 + \sqrt{41}\right)$.

2. Considere la ecuación $4x^2 - 12x + 9 = 0$. Note que el discriminante es

   $$D(4,-12,9) = (-12)^2 - 4(4)(9) = 144 - 144 = 0.$$

Por lo tanto, tenemos una solución real única. Veamos ahora la representación gráfica. Sea $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$. La gráfica de $f(x)$ está dada por

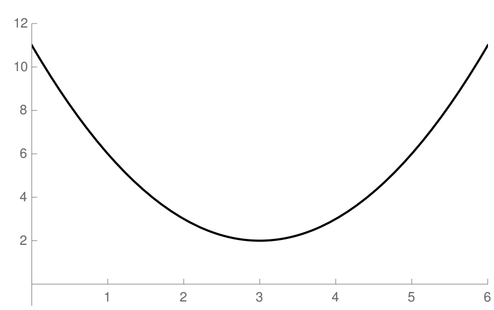


Observe que solo hay punto de intersección entre la gráfica y el eje de x. Este punto está dado por $\frac{3}{2}$.

3. Considere la ecuación $x^2 - 6x + 11 = 0$. Note que el discriminante es

$$D(1, -6, 11) = (-6)^2 - 4(1)(11) = 36 - 44 = -8 < 0.$$

Por lo tanto, no existen soluciones reales, sino complejas. Esto implica que si graficamos la función $f(x) = x^2 - 6x + 11$, entonces la gráfica no puede intersecar el eje de x. Este es el caso, pues la gráfica de $f(x)$ está dada por



Problema verbales

Ejemplo 1.7.7. A María le tomó 30 minutos más conducir 100 millas de lo que le tomó a Martha conducir 90 millas. ¿Si María manejó, en promedio, 5 mph menos que Martha, entonces cual fue la velocidad (rápidez) promedio de ambas?

Solución: Sea x la velocidad promedio (en mph) de Martha. Entonces, la velocidad promedio de María fue $x - 5$. Ahora, como Martha viajó a x mph y recorrió 90 millas, entonces a Martha le tomó

$$\frac{90}{x}$$

horas el recorrido. Como María viajó a $x - 5$ mph y recorrió 100 millas, entonces a María le tomó

$$\frac{100}{x-5}$$

horas el recorrido. Nos dicen que el tiempo de María, i.e. $100/(x-5)$, es 30 minutos más (o 1/2 hora más) que el tiempo de Martha, i.e. que $90/x$. En otras palabras,

$$\frac{100}{x-5} = \frac{90}{x} + \frac{1}{2}.$$

Limpiemos denominadores para obtener

$$\begin{aligned}
2x(x-5)\left(\frac{100}{x-5}\right) &= 2x(x-5)\left(\frac{90}{x}+\frac{1}{2}\right)\\
200x &= 180(x-5) + x(x-5).\\
200x &= 180x - 900 + x^2 - 5x.\\
0 &= x^2 - 25x - 900.
\end{aligned}$$

Utilice ahora la fórmula cuadrática para obtener que

$$\begin{aligned}
x &= \frac{25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 4(1)(-900)}}{2}\\
&= \frac{25 \pm \sqrt{625+3600}}{2}\\
&= \frac{25 \pm \sqrt{4225}}{2}\\
&= \frac{25 \pm 65}{2}\\
&= \frac{25-65}{2}, \frac{25+65}{2}\\
&= -\frac{40}{2}, \frac{90}{2}\\
&= -20, 45.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución a la ecuación cuadrática es $\{-20, 45\}$. Ahora bien, esta ecuación cuadrática modela un problema físico, por lo tanto, -20 es imposible. Concluimos que $x = 45$. Finalmente, ahora podemos decir que

Martha	viajó a 45 mph,
María	viajó a $45 - 5 = 40$ mph.

Ejemplo 1.7.8. Una pelota de beísbol se lanzó directamente hacia arriba. Su altura en $h(t)$ en pies cuando el tiempo es t segundos esta dada por

$$h(t) = -16t^2 + 40t + 6.$$

¿Cuánto tiempo le toma a la pelota llegar al suelo por primera vez (probablemente la pelota robote, por lo tanto, puede que toque el suelo en varias ocasiones)?

Solución: La pelota tocará el suelo cuando $h(t) = 0$, o sea, cuando

$$\begin{aligned} -16t^2 + 40t + 6 &= 0 \\ 8t^2 - 20t - 3 &= 0 \text{ (dividimos la ecuación entre 2).} \end{aligned}$$

Utilice ahora la fórmula cuadrática para obtener

$$\begin{aligned} t &= \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(8)(-3)}}{2(8)} \\ &= \frac{20 \pm \sqrt{400 + 96}}{16} \\ &= \frac{20 \pm \sqrt{496}}{16} \\ &= \frac{20 \pm 4\sqrt{31}}{16} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{31}}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación cuadrática es $\left\{ \frac{5 - \sqrt{31}}{4}, \frac{5 + \sqrt{31}}{4} \right\}$. Finalmente, como tiempo negativo no existe, entonces la solución es

$$t = \frac{5 + \sqrt{31}}{4} \text{ segundos.}$$

1.8 Desigualdades lineales y con valores absolutos

En secciones anteriores estudiamos ecauciones. En esta sección estudiaremos desigualdades. Analicemos algunos problemas.

El conjunto solución de la desigualdad $x > 3$ es $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$. Este conjunto lo llamaremos el intervalo de los reales mayores que 3 y lo denotaremos por $(3, \infty)$. Decimos que el intervalo está abierto en 3 (esto significa que no incluye a 3). El conjunto solución a la desigualdad $x \leq 4$ es $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$. Este conjunto lo llamaremos el intervalo de los reales menores o iguales a 4 y lo denotaremos por $(-\infty, 4]$. Decimos que el intervalo está cerrado en 4 (esto significa que incluye a 4). Cuando tenemos intervalos que incluyen a $\pm\infty$, entonces decimos que el intervalo no es acotado. Dejandonos llevar por estos ejemplos, llegamos a las siguientes definiciones:

Definición 1.8.1. Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \\ [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \\ (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \\ (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}. \end{aligned}$$

Desigualdades lineales

Ahora trabajaremos con desigualdades de la forma

$$\begin{aligned} ax+b &> 0 \\ ax+b &\geq 0 \\ ax+b &< 0 \\ ax+b &\leq 0. \end{aligned}$$

Cuando estemos resolviendo este tipo de desigualdades, es común dividir por el número a, por lo tanto, lo primero que haremos es verificar que sucede con las desigualdades cuando dividimos o multiplicamos por algún real. Considere la desigualdad

$$2 < 4.$$

Si dividimos por 2 a ambos números en la desigualdad, tenemos 1 y 2 y sabemos que

$$1 < 2.$$

Por la tanto, si dividimos por 2, el cual es positivo, entonces tenemos que la desigualdad se preserva. En realidad esto es siempre es cierto si multiplicamos o dividimos por cualquier número real positivo, i.e. la desigualdad se preserva. Por otro lado, considere la desigualdad,

$$-3 \leq 6.$$

Divida ambos números en la desigualdad por -3, entonces obtenemos 1 y -3. Sin embargo,

$$1 \geq -3.$$

Por lo tanto, si dividimos por -3, el cual es negativo, entonces tenemos que la desigualdad se revierte. En realidad esto es siempre es cierto si multiplicamos o dividimos por cualquier número real negativo, i.e. la desigualdad se revierte.

Resumen

Cuando trabajamos con desigualdades, entonces

1. Si dividimos o multiplicamos una desigualdad por un real positivo, entonces la desigualdad se preserva.

2. Si dividimos o multiplicamos una desigualdad por un real negativo, entonces la desigualdad se revierte.

Ejemplo 1.8.2. Algunos ejemplos.

1. Resuelva la siguiente desigualdad $-3x-9 < 0$. Escriba la solución en la notación de intervalo.

Solución: Note que

$$\begin{aligned}
-3x-9 &< 0\\
-3x &< 9\\
x &> \frac{9}{-3}\\
x &> -3.
\end{aligned}$$

Concluimos que el conjunto solución es $(-3,\infty)$.

2. Resuelva la siguiente desigualdad $2-5x\leq 7$. Escriba la solución en la notación de intervalo.

   Solución: Note que

$$\begin{aligned}
2-5x &\leq 7\\
2-7 &\leq 5x\\
-5 &\leq 5x\\
-1 &\leq x
\end{aligned}$$

   Concluimos que el conjunto solución es $[-1,\infty)$.

3. Resuelva la siguiente desigualdad $\frac{1}{2}x-3\geq\frac{1}{4}x+2$. Escriba la solución en la notación de intervalo.

   Solución: Note que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x-3 &\geq \frac{1}{4}x+2\\
\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x &\geq 2+3\\
\frac{1}{4}x &\geq 5\\
x &\geq 20.
\end{aligned}$$

   Concluimos que el conjunto solución es $[20,\infty)$.

Desigualdades compuestas

Una desigualdad compuesta es un enunciado en el cual dos desigualdades simples están conectadas por un "y" o por un "o". El conjunto solución de una desigualdad compuesta puede ser un intervalo que no contenga a $\pm\infty$. En este caso, decimos que el intervalo es acotado. Por ejemplo, considera la desigualdad compuesta $x\geq 2$ y $x<5$. Su solución son todos los reales que están entre 2 (incluyéndolo) y 5 (excluyéndolo). Esta solución es $2\leq x<5$ y lo escribimos en notación de intervalo como $[2,5)$.

Definición 1.8.3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, entonces

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\} \\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\} \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\} \\
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.8.4. Sea $A = (1, 5)$, $B = [3, 7)$ y $C = (6, \infty)$. Escriba los siguientes conjuntos en notación de intervalos.

1. $A \cup B$.

   Solución: Note que

   $$\begin{aligned}
   A &= \{x \,|\, 1 < x < 5\} \\
   B &= \{x \,|\, 3 \leq x < 7\},
   \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $A \cup B\{x \,|\, 1 < x < 7\} = (1, 7)$.

2. $A \cap B$.

   Solución: Note que $A \cap B = \{x \,|\, 3 \leq x < 5\} = [3, 5)$.

3. $A \cup C$.

   Solución: Note que

   $$\begin{aligned}
   A &= \{x \,|\, 1 < x < 5\} \\
   C &= \{x \,|\, x > 6\}.
   \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $A \cup C = (1, 5) \cup (6, \infty)$.

4. $A \cap C$.

   Solución: Note que $A \cap C = \emptyset$.

Ejemplo 1.8.5. Resuelva la siguiente desigualdad compuesta

$$2x - 3 > 5 \text{ y } 4 - x \geq 3.$$

Solución: Note que

$$\begin{aligned}
2x - 3 &> 5 \\
2x &> 8 \\
x &> 4,
\end{aligned}$$

mientras

$$\begin{aligned} 4-x &\geq 3 \\ 4-3 &\geq x \\ 1 &\geq x. \end{aligned}$$

Entonces, queremos $x > 4$ y $x \leq 1$, por lo tanto, la solución es $\emptyset$.

Ejemplo 1.8.6. Resuelva las siguientes desigualdades compuestas.

1. $3x - 9 \leq 9$ ó $4 - x \leq 3$.

   Solución: Note que

$$\begin{aligned} 3x-9 &\leq 9 \\ 3x &\leq 18 \\ x &\leq 6, \end{aligned}$$

   mientras

$$\begin{aligned} 4-x &\leq 3 \\ 4-3x &\leq x \\ 1 &\leq x. \end{aligned}$$

   Por lo tanto, tenemos que $x \leq 6$ ó $x \geq 1$. O sea, $(-\infty, 6] \cup [1, \infty) = (-\infty, \infty)$.

2. $-\dfrac{2}{3}x < 4$ y $\dfrac{3}{4}x < -6$.

   Solución: Note que

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}x &< 4 \\ x &> -\frac{3}{2} \cdot 4 = -6, \end{aligned}$$

   mientras

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x &< -6 \\ x &< \frac{4}{3}(-6) = -8 \end{aligned}$$

   Por lo tanto, tenemos que $x > -6$ y $x < -8$. O sea, $(-6, \infty) \cap (-\infty, -8) = \emptyset$.

3. $-4 \leq 3x - 1 < 5$.

Solución: Note que

$$\begin{aligned} -4 \leq & \quad 3x - 1 & < 5 \\ -4 + 1 \leq & \quad 3x & < 5 + 1 \\ -3 \leq & \quad 3x & < 6 \\ -1 \leq & \quad 3x & < 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución está dada por $[-1, 2)$.

4. Ramón está en su primer año de bachillerato en Química. Ramón obtuvo 76 puntos en su último examen parcial del curso de Química General. Después de hacer las debidas calculaciones (tomando en cuanta todas las notas obtenidas anteriormente y los pesos de éstas), Ramón se da cuenta que para sacar B en el curso, entonces el promedio del último examen parcial y el examen final debe estar entre 80 y 89 (inclusivo). Si todos los exámenes valen 100 puntos, ¿entre qué valores debe estar la puntuación de su examen final si Ramón quiere obtener una B en el curso?

   Solución: Sea x la nota que Ramón obtiene en el examen final. Entonces, el promedio entre el último examen parcial y el examen final debe satisfacer la siguiente desigualdad,

$$\begin{aligned} 80 \leq & \quad \frac{76 + x}{2} & \leq 89 \\ 160 \leq & \quad 76 + x & \leq 178 \\ 84 \leq & \quad x & \leq 102 \end{aligned}$$

   Por lo tanto, su puntuación en el examen final debe estar en el intervalo $[84, 102]$. Como los exámenes tiene un máximo de puntuación de 100 puntos, entonces, la puntuación en el examen final debe estar en el intervalo $[84, 100]$.

Desigualdades con valores absolutos

Las resolución de desigualdades con valores absolutos están relacionadas a la resolución de igualdades con valores absolutos. Por lo tanto, discutiremos primero igualdades con valores absolutos.

Suponga que le piden que resuelva la siguiente igualdad $|x| = 3$. En este caso, el conjunto solución no es díficil de obtener, i.e. $\{\pm 3\}$. Ahora bien, ¿cómo obtener estas dos respuestas de manera algebraica? Para responder esta pregunta, analizaremos con cuidado la definición del valor absoluto. Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, cuando nos piden que resolvamos la igualdad $|x| = 3$, tenemos que resolver el siguiente par de igualdades

$$\begin{aligned} x &= 3, \text{ cuando } x \text{ es no negativa,} \\ -x &= 3, \text{ cuando } x \text{ es negativa.} \end{aligned}$$

Ahora es claro que $x = 3$ (primera igualdad) y $x = -3$ (segunda igualdad) son soluciones a $|x| = 3$. Esta técnica de dividir una igualdad con valores absolutos a dos igualdades sin valores absolutos es la forma en la cual vamos a resolver este tipos de igualdades en este curso.

Ejemplo 1.8.7. Algunos ejemplos.

1. Resuelva $|3x - 2| = 5$.

   Solución: En este caso, tenemos que resolver las siguientes dos igualdades:

$$\begin{aligned} 3x - 2 &= 5, \text{ cuando } 3x - 2 \text{ es no negativo,} \\ -(3x - 2) &= 5, \text{ cuando } 3x - 2 \text{ es negativo.} \end{aligned}$$

   La primera igualdad produce la solución

$$\begin{aligned} 3x - 2 &= 5 \\ 3x &= 7 \\ x &= \frac{7}{3}, \end{aligned}$$

   mientras la segunda igualdad produce la solución

$$\begin{aligned} -(3x - 2) &= 5 \\ 3x - 2 &= -5 \\ 3x &= -3 \\ x &= -1. \end{aligned}$$

   Por lo tanto, el conjunto solución está dado por $\left\{\frac{7}{3}, -1\right\}$.

2. Resuelva $|5x - 1| = 9$.

   Solución: En este caso, tenemos que resolver las siguientes dos igualdades:

$$\begin{aligned} 5x - 1 &= 9, \text{ cuando } 5x - 1 \text{ es no negativo,} \\ -(5x - 1) &= 9, \text{ cuando } 5x - 1 \text{ es negativo.} \end{aligned}$$

   La primera igualdad produce la solución

$$\begin{aligned} 5x - 1 &= 9 \\ 5x &= 10 \\ x &= 2, \end{aligned}$$

   mientras la segunda igualdad produce la solución

$$\begin{aligned} -(5x - 1) &= 9 \\ 5x - 1 &= -9 \\ 5x &= -8 \\ x &= -\frac{8}{5}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución está dado por $\left\{2, -\dfrac{8}{5}\right\}$.

3. Resuelva $|2x+3| = |4x-1|$.

Solución: En este problema tenemos que tener un poco de cuidado, pues, en principio, cada valor absoluto nos provee dos igualdades. Esto es,

$$\begin{aligned} 2x+3 &= 4x-1, \text{ si ambos } 2x+3 \text{ y } 4x-1 \text{ son no negativos,}\\ -(2x+3) &= 4x-1, \text{ si } 2x+3 \text{ es negativo, pero } 4x-1 \text{ es no negativo,}\\ 2x+3 &= -(4x-1), \text{ si } 2x+3 \text{ es no negativo, pero } 4x-1 \text{ es negativo,}\\ -(2x+3) &= -(4x-1), \text{ si ambos } 2x+3 \text{ y } 4x-1 \text{ son negativos.} \end{aligned}$$

Sin embargo, observe que la primera y la última ecuación son equivalentes (multiplique la última por -1 para obtener la primera), mientras la segunda y la tercera son equivalentes (multiplique la tercera por -1 para obtener la segunda). Por lo tanto, tenemos que resolver las siguientes dos ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x+3 &= 4x-1,\\ -(2x+3) &= 4x-1. \end{aligned}$$

Esto no es una casualidad, en realidad, cuando se confronte con un problema de la forma

$$|ax+b| = |cx+d|,$$

entonces las soluciones serán equellas que provengan de las siguientes dos ecuaciones

$$\begin{aligned} ax+b &= cx+d,\\ -(ax+b) &= cx+d. \end{aligned}$$

Regresemos a nuestro problema. Observe que

$$\begin{aligned} 2x+3 &= 4x-1,\\ 2x-4x &= -1-3\\ -2x &= -4\\ x &= 2, \end{aligned}$$

mientras

$$\begin{aligned} -(2x+3) &= 4x-1,\\ -2x-3 &= 4x-1,\\ -2x-4x &= -1+3\\ -6x &= 2\\ x &= -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución a la igualdad $|2x+3| = |4x+1|$ es $\left\{-\dfrac{1}{3}, 2\right\}$.

Ya que hemos trabajado con igualdades que envuelven valores absolutos, estudiamos ahora problemas que envuelven desigualdades con valores absolutos. Considere primero el problema $|x| < 3$. De la misma manera que una ecaución de la forma $|x| = a$ se reduce a dos ecuaciones, la desigualdad $|x| < 3$ se reduce a dos desigualdades

$$\begin{aligned} x &< 3, \text{ cuando } x \text{ es positivo,} \\ -x &< 3, \text{ cuando } x \text{ es negativo.} \end{aligned}$$

La primera desigualdad tiene a $(-\infty, 3)$ como solución, mientras la segunda desigualdad es equivalente a

$$\begin{aligned} -x &< 3 \\ x &> -3, \end{aligned}$$

cuya solución es $(-3, \infty)$. Por lo tanto, queremos $x < 3$ y $x > -3$, en otras palabras, $(-\infty, 3) \cap (-3, \infty) = (-3, 3)$. Otra forma de interpretar la desigualdad $|x| < 3$ es que x está a menos de tres unidades de 0, i.e $-3 < x < 3$, lo que implica que x está en $(-3, 3)$.

Por otro, la desigualdad $|x| > 5$ significa que x está a más de cinco unidades de 0, en otras palabras, $x > 5$ ó $x < -5$. Esto nos indica que x está en $(-\infty, -5) \cup (5, \infty)$. Si continuamos analizando estas desigualdades llegamos a la siguiente conclusión:

Desigualdad con valor absoluto	Enunciado equivalente	Solución en intervalos
$\|x\| < a$	$-a < x < a$	$(-a, a)$
$\|x\| \leq a$	$-a \leq x \leq a$	$[-a, a]$
$\|x\| > a$	$x > a$ ó $x < -a$	$(-\infty, -a) \cup (a, \infty)$
$\|x\| \geq a$	$x \geq a$ ó $x \leq -a$	$(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$

Ejemplo 1.8.8. Resuelva las siguientes desigualdades lineales.

1. $|3x + 2| < 7$.

   Solución: Note que

$$\begin{array}{rcl} |3x+2| & < & 7 \\ -7 < & 3x+2 & < 7 \\ -9 < & 3x & < 5 \\ -3 < & x & < \dfrac{5}{3}. \end{array}$$

   Por lo tanto, la solución es $(-3, 5/3)$.

2. $-2|4 - x| \leq -4$.

Solución: Note que

$$\begin{aligned} -2|4-x| &\leq -4 \\ |4-x| &\geq 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{array}{rcl} 4-x \geq 2 & \text{ó} & 4-x \leq -2 \\ 4-2 \geq x & \text{ó} & 4+2 \leq x \\ 2 \geq x & \text{ó} & 6 \leq x. \end{array}$$

En otras palabras $(-\infty, 2] \cup [6, \infty)$.

3. $|5x+3| \leq -2$.

   Solución: Note que el valor absoluto de cualquier real es no negativo. Por lo tanto, $|5x+3| \leq -2$ no tiene solución.