Programa Inmersión, Verano 2024
Notas escritas por Dr. M

Notas del cursos. Basadas en los prontuarios de MATE 3001 y MATE 3171

Clase #15: lunes, 15 de julio de 2024.

1 Ecuaciones, desigualdades y modelaje

1.8 Continuación: desigualdades lineales y con valores absolutos

Continuamos con desigualdades lineales y con valores absolutos.

Ejemplo 1.8.1. 1. Un técnico está probando una balanza con un bloque de hierro que pesa 50 lbs. La balanza pasa esta prueba si el error relativo cuando este bloque se pesa es menor que el 0.1%. Si x es la lectura en la balanza, entonces para que valores de x esta balanza pasa esta prueba?

Solución: Si el error relativo debe ser menor a 0.1%, entonces x debe satisfacer la siguiente desigualdad

$$\frac{|x-50|}{50} < 0.001.$$

Entonces,

$$\begin{array}{rcl} -0.001 < & \dfrac{x-50}{50} & < 0.001 \\ -0.05 < & x-50 & < 0.05 \\ 49.95 < & x & < 50.05. \end{array}$$

Por lo tanto, la balanza pasa la prueba si enseña una lectura en el intervalo $(49.95, 50.05)$.

2 Funciones y gráficas

2.1 Funciones

Antetiormente discutimos brevemente el concepto de funciones (vea lectura 6). Como parte de nuestra discusión, discutimos los conceptos de *dominio* y *campo de valores*. Estos dos conceptos son importantes, pues si $f(x)$ es una función, entonces el dominio nos dice que valores x son válidos, mientras el campo de valores nos dice que valores obtiene la función.

Si $f : A \to B$ es una función, entonces el dominio de f es

$$\mathrm{dom}(f) = \{a \in A \,|\, f(a) \in B\}.$$

El conjunto de los elementos de B que son imágenes de elementos de A se llama campo de valores (CV), i.e.

$$\mathrm{CV}(f) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B.$$

Ejemplo 2.1.1. Algunos ejemplos.

1. Si la función está dada por

$$f = \{(1,2),(3,1),(4,2),(2,3)\},$$

   entonces $\mathrm{dom}(f) = \{1,2,3,4\}$ y $\mathrm{CV}(f) = \{1,2,3\}$.

2. Si $f(x) = \sqrt{2x-1}$, entonces,

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 \geq 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geq \frac{1}{2}\right\} \\ &= \left[\frac{1}{2}, \infty\right). \end{aligned}$$

   Ahora, si $x \geq 1/2$ y $y = \sqrt{2x-1}$, entonces $y \geq 0$. Concluimos que

$$\mathrm{CV}(f) = [0, \infty).$$

3. Si $f(x) = |x - 2|$, entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f) &= (-\infty, \infty) \\ \mathrm{CV}(f) &= [0, \infty). \end{aligned}$$

   ¿Puede explicar el por qué?

Tasa de cambio promedio de una función

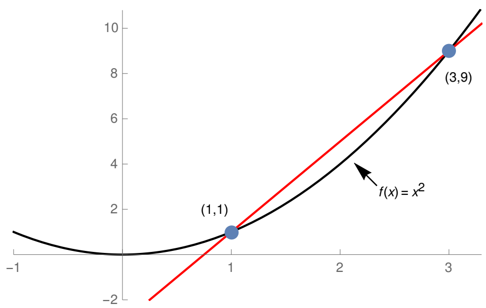
Definición 2.1.2. Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos pares ordenados de una función. Definimos la tasa de cambio promedio de a función cuando x varía de x_1 a x_2 como el cambio en la coordenada de y sobre el cambio en la coordenada de x,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Por ejemplo, sea $f(x) = x^2$. La tasa de cambio promedio de esta función en el intervalo $[1,3]$ es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = 4.$$

Una representación gráfica de esto es
Observe que la tasa promedio de cambio de la función en el intervalo $[1,3]$ coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(1,(f(1))$ y $(3, f(3))$.



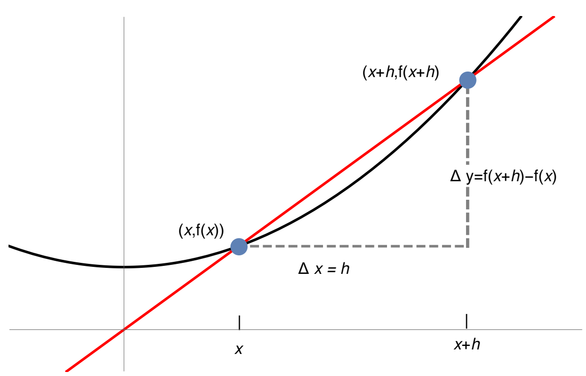
Ejemplo 2.1.3. La población de Puerto Rico en el año 2000 era de 3,808,610 (censo de los EEUU). En el 2015, la población era de 3,474,182 (estimado censo de los EEUU). ¿Cuál fue la tasa de cambio promedio de la población durante este periodo de tiempo?

Solución: Suponga que $p(t)$ corresponde a la población de Puerto Rico (medida en millones) en el año t. Entonces, la tasa de cambio de la población fue

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{\Delta t} &= \frac{3.474182 - 3.808610}{2015 - 2000} \\ &= -\frac{0.334428}{15} \approx -0.022295. \end{aligned}$$

Note que obtenemos una tasa de cambio negativa. Esto nos dice que el cambio en población promedio fue de -0.022295 millones de personas/año. Esto es lo mismo que decir que durante ese periodo, en promedio, la población de Puerto Rico perdía 22,295 personas por año.

Suponga ahora que queremos calcular la tasa de cambio promedio de la función $f(x)$ en el intervalo $[x, x+h]$. Entonces tenemos la siguiente gráfica:



Observe que tenemos lo siguiente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h.}$$

Este cociente es bien importante, especialmente en cursos más avanzados como lo es el Cálculo. Por lo tanto, le daremos un nombre.

Definición 2.1.4. El cociente diferencial de una función es la expresión

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

En cursos más avanzados, especialmente en Cálculo, lo importante cuando trabaje con cocientes diferenciales será el poder eliminar la h del denominador. Practiquemos este problema, i.e. eliminar la h del denominador.

Ejemplo 2.1.5. Encuentre el cociente diferencial de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 3x + 2$.

   Solución: Observe que

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{3(x+h)+2-(3x+2)}{h} \\ &= \frac{3x+3h+2-3x-2}{h} \\ &= \frac{3h}{h} \\ &= 3. \end{aligned}$$

2. $f(x) = x^2 - 2x$.

   Solución: Observe que

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2-2(x+h)-(x^2-2x)}{h} \\ &= \frac{x^2+2xh+h^2-2x-2h-x^2-2x}{h} \\ &= \frac{2xh+h^2-2h}{h} \\ &= \frac{h(2x+h-2)}{h} \\ &= 2x+h-2. \end{aligned}$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$.

   Solución: Observe que

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\left(\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

4. $f(x) = \dfrac{5}{x}$.

   Solución: Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{5}{x+h}-\frac{5}{x}}{h} \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{5}{x+h}-\frac{5}{x}\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{5(x+h)-5x}{x(x+h)}\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{5x+5h-5x}{x(x+h)}\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{5h}{x(x+h)}\right) \\
&= \frac{5}{x(x+h)}.
\end{aligned}$$

2.2 Gráficas de relaciones y funciones

Anteriormente discutimos brevemente como graficar funciones. Repasemos un poco.

Ejemplo 2.2.1. Algunos ejemplos.

1. Grafique la función $f(x) = x^3$.

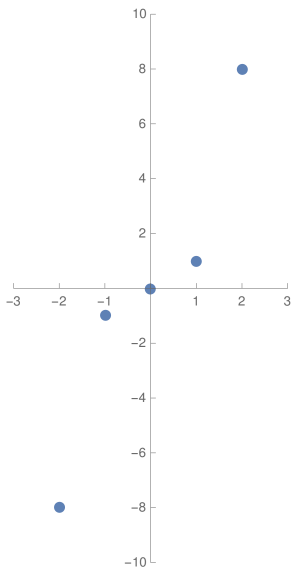
   Solución: Primero observe que tanto el dominio como el campo de valores de esta función es $(-\infty, \infty)$. Por lo tanto, escojamos algunos puntos en este dominio.

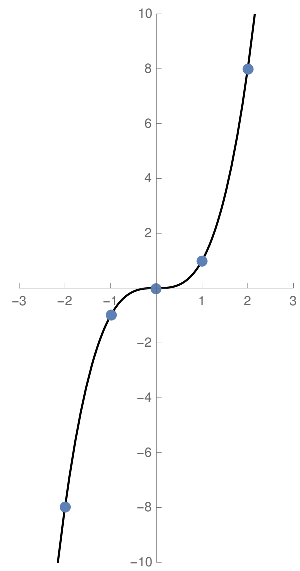
x	$f(x) = x^3$
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8

   Ahora graficamos los puntos y luego los unimos con una curva.

2. Grafique la función $f(x) = \sqrt{1-x}$.

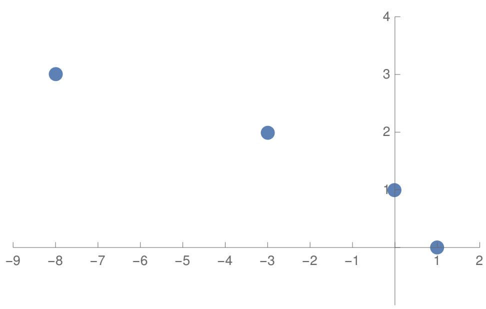
   Solución: Primero calularemos su dominio. Note que $f(x) = \sqrt{1-x}$ está definida si y solo si $1 - x \geq 0$. O sea, si $x \leq 1$. Por lo tanto, su dominio es $(-\infty, 1]$. Ahora observe que si $x \leq 1$, entonces $y = \sqrt{1-x} \geq 0$. Por lo tanto, el campo de valores es $[0, \infty)$. Tomemos ahora algunos valores en el dominio.

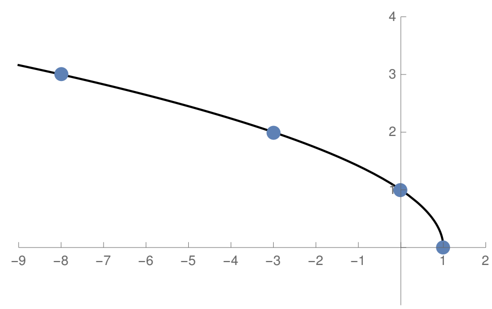




x	$f(x) = \sqrt{1-x}$
1	0
0	1
-3	2
-8	3

Como hicimos en el ejemplo anterior, graficamos los puntos y luego los unimos con una curva.





3. Grafique $x = y^2$.

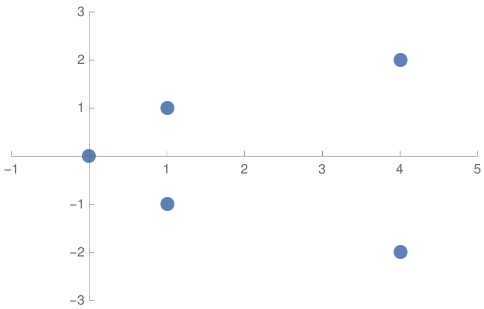
   Solución: Primero note que $x \geq 0$, mientras $-\infty < y < \infty$. Tomemos ahora algunos valores:

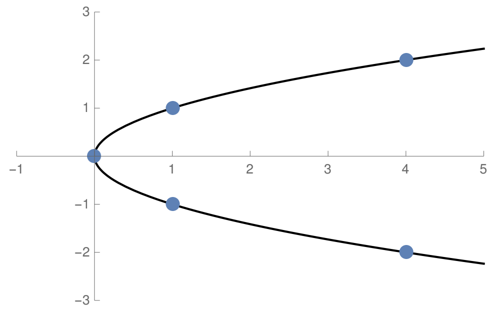
   Como hicimos en los ejemplos anteriores, graficamos los puntos y luego los unimos con una curva.

Ejemplo 2.2.2. Grafique la siguiente función definida por pedazos

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ 3x, & x > 1. \end{cases}$$

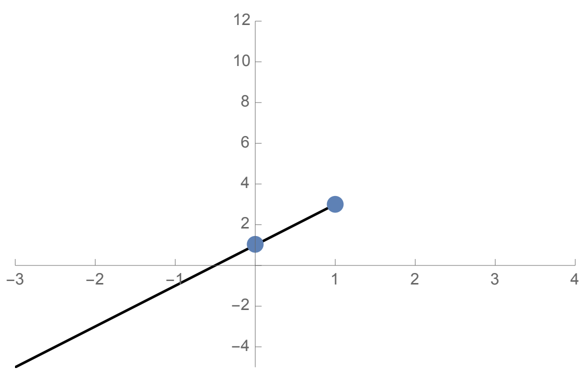
$x = y^2$	y
4	-2
1	-1
0	0
1	1
4	2



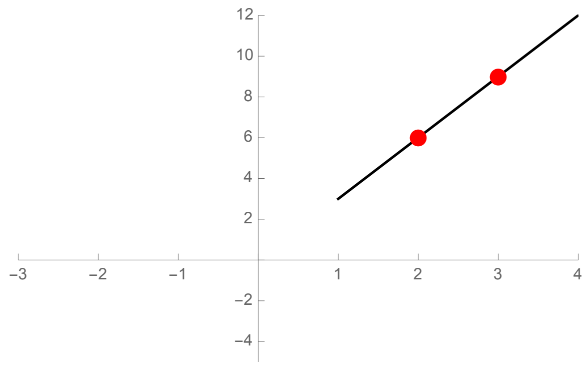


Solución: Pimero note que el dominio de esta función es $(-\infty, \infty)$, pues está definida para todos los reales. Ahora bien, cada pedazo de la función es una recta, por lo tanto, si tenemos dos valores (para cada pedazo), podemos graficar su recta.

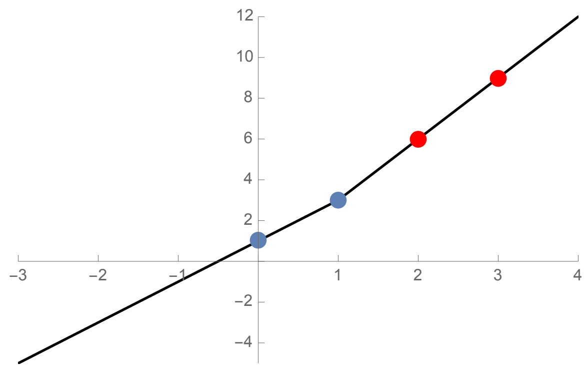
Primero tome el pedazo cuando $x \leq 1$. Note que $(0, 1)$ y $(1, 3)$ están en la recta $y = 2x + 1$. Ahora grafique estos dos puntos en el plano y trace la recta que pasa por ambos puntos. Sea cuidadoso(a), la recta llega hasta $x = 1$, pues para $x > 1$, tenemos otra definición para la función. La representación gráfica se encuentra a continuación. Los puntos están en azul.



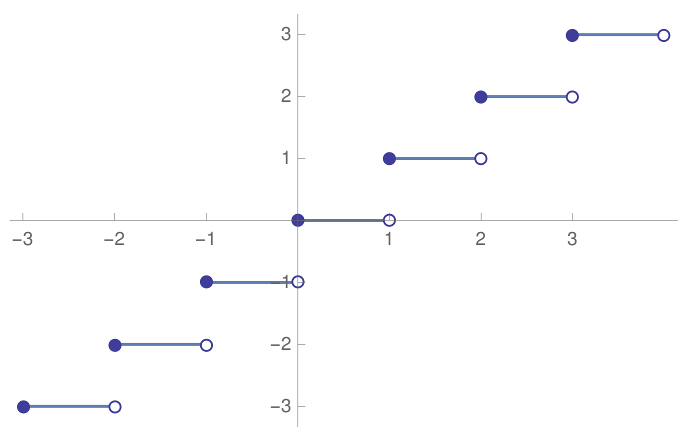
Ahora tome el pedazo cuando $x > 1$. Note que $(2, 6)$ y $(3, 9)$ estan en la recta $y = 3x$. Grafique estos dos puntos en el plano y trace la recta que pasa por ambos puntos. Sea cuidadoso(a), la recta llega hasta $x = 1$, pues para $x \leq 1$, tenemos otra definición para la función. La representación gráfica se encuentra a continuación. Los puntos están en rojo.



Finalmente, ponga las dos rectas juntas para obtener la siguiente gráfica.



Ejemplo 2.2.3. La función Piso, denotada por $f(x) = \lfloor x \rfloor$, está definida como el entero mayor n tal que $n \leq x$. Por ejemplo, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ y $\lfloor -2.3 \rfloor = -3$. También note que si $x \in [0, 1)$, entonces $\lfloor x \rfloor = 0$. De igual forma, si $x \in [1, 2)$, entonces $\lfloor x \rfloor = 1$. Por otro lado, si $x \in [-1, 0)$, entonces $\lfloor x \rfloor = -1$. El patrón ahora es claro. Si a es cualquier entero, entonces $\lfloor x \rfloor = a$ para todo $x \in [a, a + 1)$. O sea, la función $f(x) = \lfloor x \rfloor$ es la constante a en el intervalo $[a, a + 1)$. Concluimos que la gráfica que $f(x) = \lfloor x \rfloor$ está dada por



Funciones crecientes, decrecientes y constantes

Definición 2.2.4. Sea $f(x)$ una función. Decimos que

1. $f(x)$ es creciente si $a < b$ implica que $f(a) \leq f(b)$ para todo $a, b \in \mathrm{dom}(f)$. Si la desigualdad $\leq$ se reemplaza por $<$, i.e si $a < b$ implica que $f(a) < f(b)$ para todo $a, b \in \mathrm{dom}(f)$, entonces decimos que $f(x)$ es estrictamente creciente.

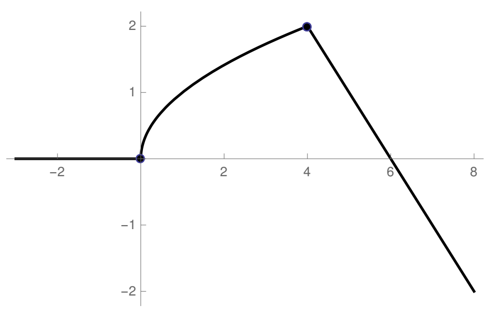
2. $f(x)$ es decreciente si $a < b$ implica que $f(a) \geq f(b)$ para todo $a, b \in \mathrm{dom}(f)$. Si la desigualdad $\geq$ se reemplaza por $>$, i.e si $a < b$ implica que $f(a) > f(b)$ para todo $a, b \in \mathrm{dom}(f)$, entonces decimos que $f(x)$ es estrictamente decreciente.

3. $f(x)$ es constante si $a < b$ implica que $f(a) = f(b)$ para todo $a, b \in \mathrm{dom}(f)$.

Ejemplo 2.2.5. Considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq 4 \\ 6 - x, & x > 4. \end{cases}$$

Usando las técnicas discutidas anteriormente, podemos graficar esta función. En este caso, tenemos



Note que $f(x)$ es constante en $(-\infty, 0]$, estrictamente creciente en $(0, 4]$ y estrictamente decreciente en $(4, \infty)$.

De ahora en adelante, cuando digamos “creciente”, entenderemos “estrictamente creciente”. De igual forma cuando digamos “decreciente”. Ojo, esto se hace para simplificar la lectura, pero recuerde que “creciente” y ”estrictamente creciente” no son sinónimos.

Ejemplo 2.2.6. Sin graficar, determine si la función $f(x) = 4x + 3$ es creciente o decreciente.

Solución: Suponga que $a < b$. Note que

$$\begin{array}{rcl} a & < & b \\ 4a & < & 4b \\ 4a + 3 & < & 4b + 3 \\ f(a) & < & f(b). \end{array}$$

Como $a < b$ implica que $f(a) < f(b)$, entonces concluimos que la función $f(x) = 4x+3$ es (estrictamente) creciente.

Ejemplo 2.2.7. Sin graficar, determine si la función $f(x) = 4/x$ es creciente o decreciente en $(0, \infty)$.

Solución: Suponga que $a < b$. Note que

$$\begin{array}{rcl} a & < & b \\ \frac{1}{a} & > & \frac{1}{b} \\ \frac{4}{a} & > & \frac{4}{b} \\ f(a) & > & f(b). \end{array}$$

Como $a < b$ implica que $f(a) > f(b)$, entonces concluimos que la función $f(x) = 4/x$ es (estrictamente) decreciente.