Programa Inmersión, Verano 2024
Notas escritas por Dr. M

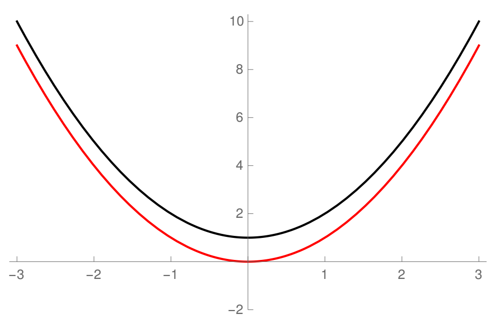
Notas del cursos. Basadas en los prontuarios de MATE 3001 y MATE 3171

Clase #16: martes, 16 de julio de 2024.

2 Funciones y gráficas

2.3 Familias de funciones, transformaciones y simetría

Existen ocasiones en las cuales podemos obtener la gráfica de una función dada otra función. Por ejemplo, considere la función $g(x) = x^2 + 1$. Observe que la gráfica de esta función se puede obtener de la gráfica de la función $f(x) = x^2$. Para ser más específico, a continuación verá las gráficas de ambas funciones. La función en rojo es $f(x) = x^2$, mientras la función en negro es $g(x) = x^2 + 1$.



Observe que la gráfica de $g(x) = x^2 + 1$ es la misma que la gráfica de $f(x) = x^2$, pero trasladada una unidad hacia arriba.

En esta sección, dada una función $f(x)$, estudiaremos transformaciones de la forma

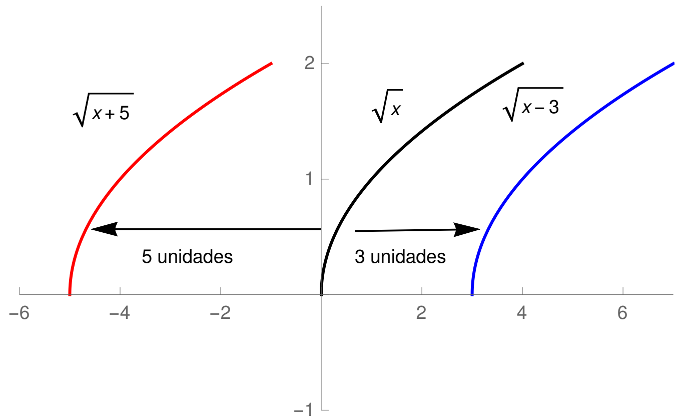
$$af(x-h)+k,$$

donde $a, h, k \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. Las gráficas de estas transformaciones pueden obtenerse de la gráfica de la función original.

Transformaciones horizontales

Si nos dejamos llevar por el orden de operaciones, la primera operación que tenemos que ejecutar en la fórmula $y = af(x-h)+k$ es substraer h de x. Luego, multiplicamos $f(x-h)$ por a y finalmente añadimos el valor de k. Este orden es importante, por lo tanto, empezaremos con transformaciones de la forma $f(x-h)$.

Definición 2.3.1. Si $h > 0$, entonces la gráfica de $y = f(x-h)$ es una traslación de h unidades a la derecha de la gráfica de $y = f(x)$. Si $h < 0$, entonces la gráfica de $y = f(x-h)$ es una traslación de $|h|$ unidades a la izquierda de la gráfica de $y = f(x)$.



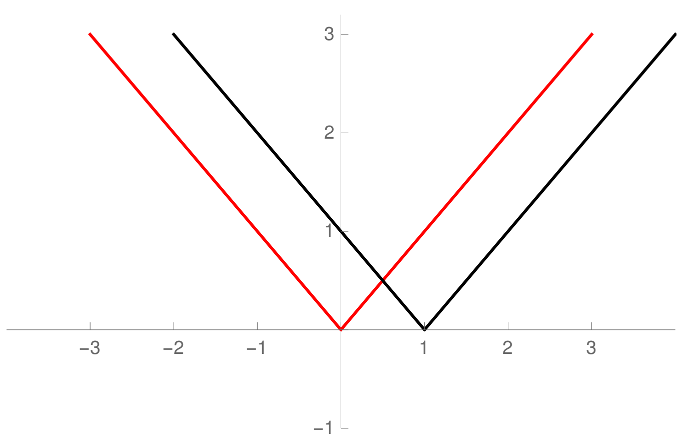
Ejemplo 2.3.2. Considere la funciones $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x-3}$ y $h(x) = \sqrt{x+5}$. Las gráficas de estas funciones están dadas por ($f(x)$ en negro, $g(x)$ en azul y $h(x)$ en rojo)

Observe que la gráfica de $g(x)$ es la gráfica de $f(x)$ trasladada 3 unidades hacia la derecha, mientras la gráfica de $h(x)$ es la gráfica de $f(x)$ trasladada 5 unidades hacia la izquierda.

Ejemplo 2.3.3. Algunos ejemplos.

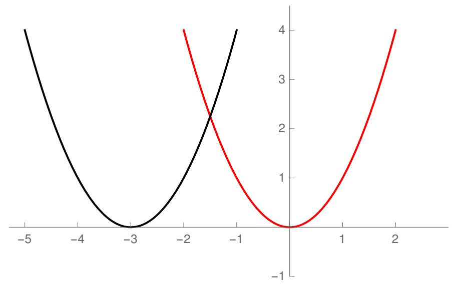
1. Grafique la función $f(x) = |x-1|$.

   Solución: Note que esta función es una traslación de una unidad hacia la derecha de la función $|x|$, por lo tanto, su gráfica es ($f(x) = |x-1|$ en negro, $|x|$ en rojo)



2. Grafique la función $f(x) = (x+3)^2$.

   Solución: Note que esta función es una traslación de tres unidades hacia la izquierda de la función x^2, por lo tanto, su gráfica es ($f(x) = (x+3)^2$ en negro, x^2 en rojo)



Reflexión

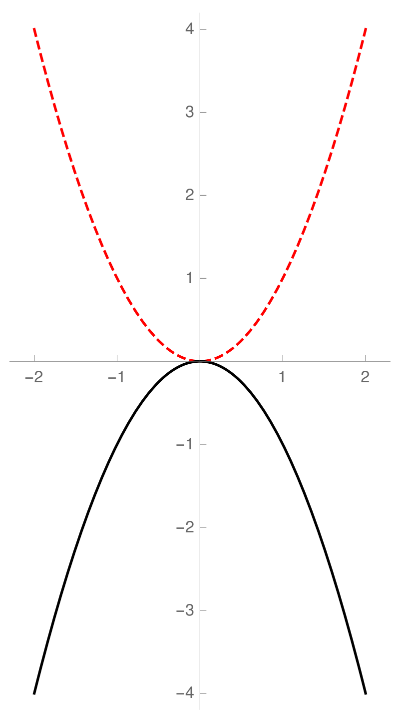
Ahora vamos a trabajar con transformaciones de la forma $af(x)$. Note que si $a = -1$, entonces el valor de $y = -f(x)$ es el opuesto del valor de $y = f(x)$. En otras palabras, todos los puntos en la gráfica de $y = -f(x)$ pueden obtenerse simplemente cambiando los signos de todas las coordenadas de y en la gráfica de $y = f(x)$. Esto tiene el efecto de que ambas gráficas son la imagen de espejo de la otra con respecto al eje de x.

Definición 2.3.4. La gráfica de $y = -f(x)$ es una reflexión en el eje de x de la gráfica de $y = f(x)$.

Ejemplo 2.3.5. Grafique cada una de las siguientes funciones.

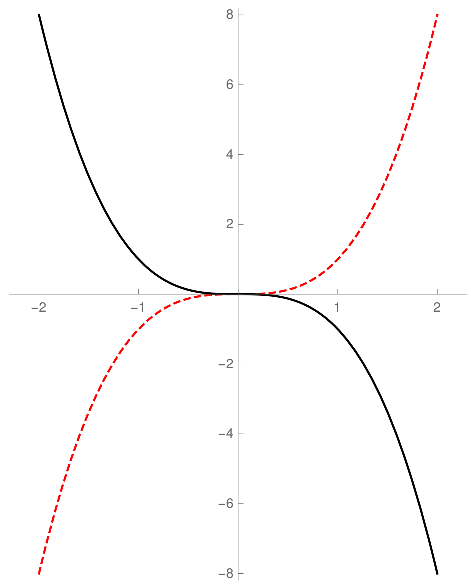
1. $f(x) = -x^2$.

   Solución: Note que $f(x) = -x^2$ es un reflexión de x^2. A continuación la gráfica de la función ($f(x) = -x^2$ en negro, x^2 en rojo entrecortado)



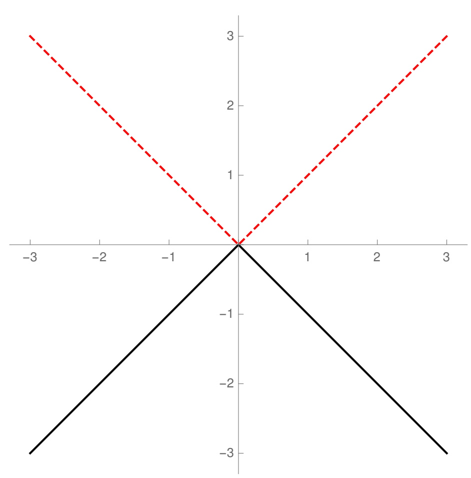
2. $f(x) = -x^3$.

Solución: Note que $f(x) = -x^3$ es un reflexión de x^3. A continuación la gráfica de la función ($f(x) = -x^3$ en negro, x^3 en rojo entrecortado)



3. $f(x) = -|x|$.

Solución: Note que $f(x) = -|x|$ es un reflexión de $|x|$. A continuación la gráfica de la función ($f(x) = -|x|$ en negro, $|x|$ en rojo entrecortado)



Estiramiento y contracción

Note que todas las coordenadas de y en $y = af(x)$ se obtienen multiplicando las coodenadas de y en la gráfica de $y = f(x)$ por a. Si $a > 1$, entonces la gráfica de $y = f(x)$ se estira por un factor de a. Si por el contrario, $0 < a < 1$, entonces la gráfica de $y = f(x)$ se encoje por un factor de a. Si a es negativa, entonces ocurre una reflexión y a la misma vez una estiramiento o una contracción.

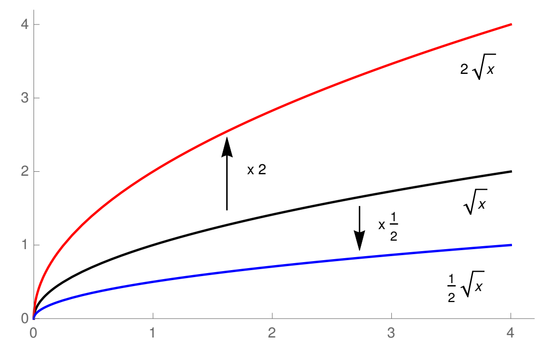
Definición 2.3.6. La gráfica de $y = af(x)$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ por

1. Un estiramiento de la gráfica de $y = f(x)$ por a cuando $a > 1$, ó
2. Una contracción de la gráfica de $y = f(x)$ por a cuando $0 < a < 1$.

Ejemplo 2.3.7. Algunos ejemplos.

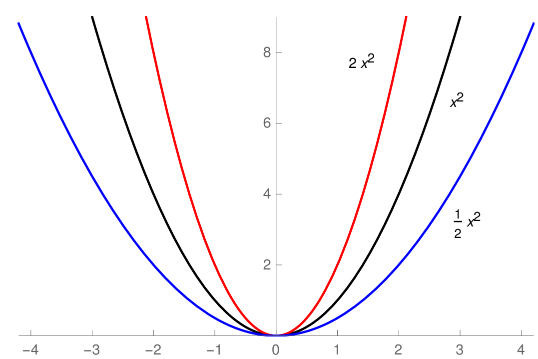
1. Grafique $\sqrt{x}, 2\sqrt{x}$ y $\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$.

   Solución: Note que



2. Grafique $x^2, 2x^2$ y $\dfrac{1}{2}x^2$.

   Solución: Note que



Traslación vertical

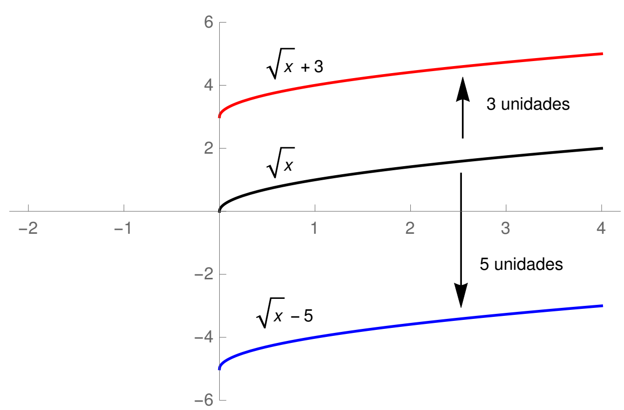
La última operación en la transformación $y = af(x-h)+k$ es la adición de k. Note que si sumamos la constante k a todas las coodenadas de y de la función $y = f(x)$, entonces trasladamos la gráfica hacia arriba o hacia abajo dependiendo de si k es positivo o negativo.

Definición 2.3.8. Si $k > 0$, entonces la gráfica de $y = f(x) + k$ es una traslación de k unidades hacia arriba de la gráfica de $y = f(x)$. Si $k < 0$, entonces la gráfica de $y = f(x) + k$ es una traslación de $|k|$ unidades hacia abajo de la gráfica de $y = f(x)$.

Ejemplo 2.3.9. Algunos ejemplos.

1. Grafique $\sqrt{x}$, $\sqrt{x}+3$ y $\sqrt{x}-5$.

   Solución: Note que



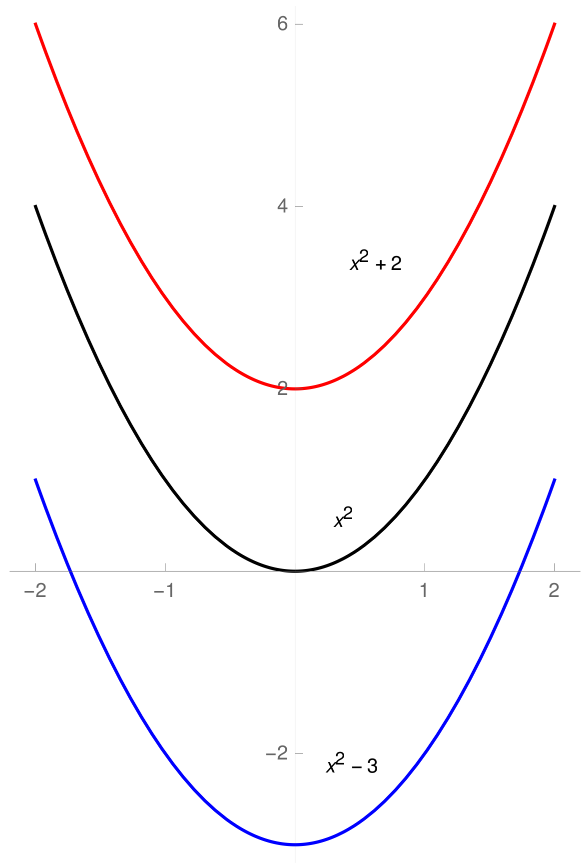
2. Grafique x^2, x^2+2 y x^2-3.

   Solución: Las gráficas están en la siguiente página.

Multiples transformaciones

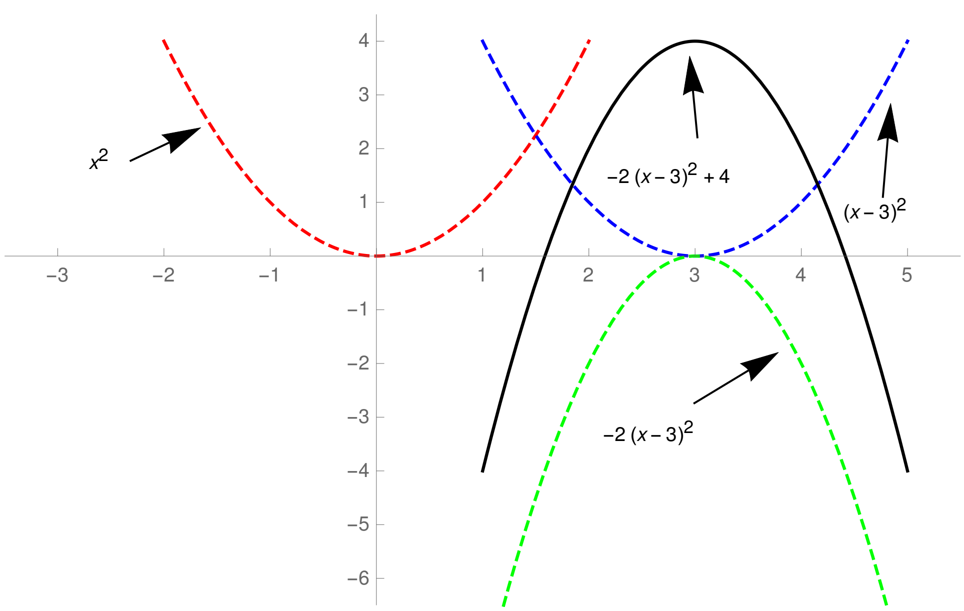
Para graficar $y = af(x-h)+k$ aplique las siguientes transformaciones en el siguiente orden

1. Traslación horizontal (h).
2. Reflexión/estiramiento/contracción (a).
3. Traslación vertical (k).



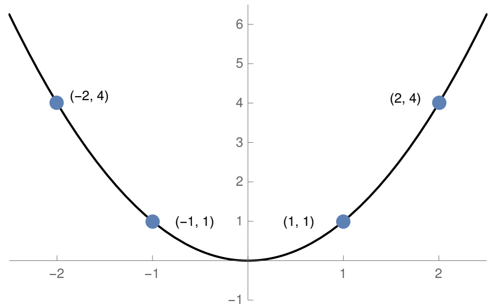
Ejemplo 2.3.10. Grafique $y = -2(x-3)^2 + 4$.

Solución: Note que



Simetría

Observe que la función x^2 tiene simetría con respecto al eje de y.



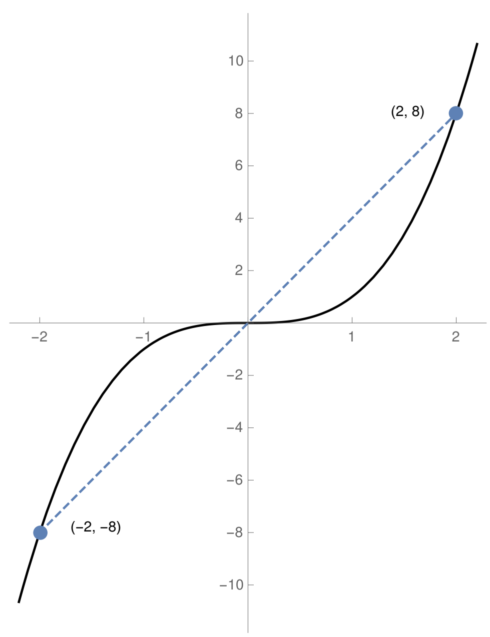
Esta simetría de x^2 es especial, pero no es única para ella.

Definición 2.3.11. Si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \text{dom}(f)$, entonces la función $f(x)$ es par y su gráfica es simétrica alrededor del eje de y.

Ejemplo 2.3.12. Determine cuales de las siguientes funciones son pares.

1. $f(x) = x^4 + 4x^2 + 1$.
2. $f(x) = x^2|x|$.
3. $f(x) = x^3 + x^2 + 1$
4. $f(x) = x^4 + x + 2$.

Considere ahora la función x^3.



En la gráfica de $y = x^3$ encontramos los puntos $(2, 8)$ y $(-2, -8)$. Note que el exponente impar en x^3 hace que la segunda coordenada sea negativa cuando cambiamos la primera coordenada de positiva a negativa. Estos puntos están equidistantes del origen $(0,0)$ y en lados opuestos. Por lo tanto, la simetría de esta función es alrededor del origen. En este caso, $f(x)$ y $f(-x)$ no son iguales, pero $f(-x) = -f(x)$.

Definición 2.3.13. Si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathrm{dom}(f)$, entonces la función $f(x)$ es impar y su gráfica es simétrica alrededor del origen.

Ejemplo 2.3.14. Determine cuales de las siguientes funciones son impares.

1. $f(x) = x^4 + 4x^2 + 1$.
2. $f(x) = x|x|$.
3. $f(x) = x^3 + x$
4. $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

2.4 Operaciones con funciones

Operaciones básicas con funciones

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones. La suma, diferencia, producto y cociente de $f(x)$ y $g(x)$ están definidos como

$$\begin{array}{rcl} (f+g)(x) & = & f(x) + g(x) \\ (f-g)(x) & = & f(x) - g(x) \\ (f \cdot g)(x) & = & f(x) \cdot g(x) \\ \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) & = & \dfrac{f(x)}{g(x)}, \text{ dado que } g(x) \neq 0. \end{array}$$

Ejemplo 2.4.1. Sea $f(x) = 3\sqrt{x} - 2$ y $g(x) = x^2 + 5$. Encuentre

1. $(f+g)(4)$.

   Solución: Note que

$$\begin{array}{rcl} (f+g)(4) & = & f(4) + g(4) \\ & = & (3\sqrt{4} - 2) + (4^2 + 5) \\ & = & (6-2) + (16+5) \\ & = & 25. \end{array}$$

2. $(f-g)(x)$.

   Solución: Note que

$$\begin{array}{rcl} (f-g)(x) & = & f(x) - g(x) \\ & = & (3\sqrt{x} - 2) - (x^2 + 5) \\ & = & 3\sqrt{x} - x^2 - 7. \end{array}$$

3. $(f \cdot g)(0)$.

   Solución: Note que

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(0) &= f(0) \cdot g(0) \\ &= (3\sqrt{0} - 2)(0^2 + 5) \\ &= -10. \end{aligned}$$

4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(9)$.

   Solución: Note que

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)(9) &= \frac{f(9)}{g(9)} \\ &= \frac{3\sqrt{9} - 2}{9^2 + 5} = \frac{7}{86}. \end{aligned}$$

Observe que el dominio de $f \pm g$ y $f \cdot g$ es la intersección de los dominios de f y g, pues es obligatorio que ambas funciones estén bien definidas. En otras palabras,

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(f \pm g) &= \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g) \\ \operatorname{dom}(f \cdot g) &= \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g). \end{aligned}$$

El dominio de f/g es un poco más complicado. En este caso, el dominio es la intersección de los dominios de f y g, excluyendo los puntos donde $g(x) = 0$. En otras palabras,

$$\operatorname{dom}(f/g) = \{x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g) \mid g(x) \neq 0\}.$$

Ejemplo 2.4.2. Sea $f = \{(1,3), (2,8), (3,6), (5,9)\}$ y $g = \{(1,6), (2,11), (3,0), (4,1)\}$. Encuentre $f + g$, $f \cdot g$ y f/g. Encuentre el dominio de cada una de estas funciones.

Solución: Note que $\operatorname{dom}(f) = \{1,2,3,5\}$ y $\operatorname{dom}(g) = \{1,2,3,4\}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(f + g) &= \{1,2,3\} \quad \text{y} \quad f + g = \{(1,9), (2,19), (3,6)\}, \\ \operatorname{dom}(f \cdot g) &= \{1,2,3\} \quad \text{y} \quad f \cdot g = \{(1,18), (2,88), (3,0)\}, \\ \operatorname{dom}(f/g) &= \{1,2\} \quad \text{y} \quad \frac{f}{g} = \left\{\left(1, \frac{1}{2}\right), \left(2, \frac{8}{11}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.3. Sea $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 3x + 1$ y $h(x) = x - 1$. Encuentre cada una de las siguientes funciones y su dominio.

$$f + g, \quad \frac{g}{f}, \quad g \cdot h, \quad g - h.$$

Solución: Note que los dominios de f, g y h están dados por

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f) &= [0,\infty) \\ \mathrm{dom}(g) &= (-\infty,\infty) \\ \mathrm{dom}(g) &= (-\infty,\infty). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f+g) &= \mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g) = [0,\infty)\cap(-\infty,\infty) = [0,\infty) \\ \mathrm{dom}(g/f) &= \{x\in\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)\,|\,f(x)\neq 0\} = [0,\infty)\setminus\{0\} = (0,\infty) \\ \mathrm{dom}(g\cdot h) &= \mathrm{dom}(g)\cap\mathrm{dom}(h) = (-\infty,\infty)\cap(-\infty,\infty) = (-\infty,\infty) \\ \mathrm{dom}(g-h) &= \mathrm{dom}(g)\cap\mathrm{dom}(h) = (-\infty,\infty). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= \sqrt{x}+3x+1 \\ \left(\frac{g}{f}\right)(x) &= \frac{3x+1}{\sqrt{x}} \\ (g\cdot h)(x) &= (3x+1)(x-1) = 3x^2-2x-1 \\ (g-h)(x) &= (3x+1)-(x-1) = 2x+2. \end{aligned}$$

Composición de funciones

En ocasiones, el resultado de una función necesita ser evaluado en otra función. Por ejemplo, el número de posillos de café comprados a \$0.90 cada uno, determina un subtotal. El subtotal luego es utilizado para determinar el total (después de impuestos). Por lo tanto el número de posillos en realidad determina el total a pagar y esta función se llama la composición de las otras dos funciones.

Definición 2.4.4. Si f y g son funciones, entonces la composición de f y g, escrita $f\circ g$, está definida por la ecuación

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)),$$

dado que $g(x)$ esté en el dominio de f, esto es

$$\mathrm{dom}(f\circ g) = \{x\in\mathrm{dom}(g)\,|\,g(x)\in\mathrm{dom}(f)\}.$$

La composición de g con f, escrita $g\circ f$, está definida por

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)),$$

dado que $f(x)$ esté en el dominio de g, esto es

$$\mathrm{dom}(g\circ f) = \{x\in\mathrm{dom}(f)\,|\,f(x)\in\mathrm{dom}(g)\}.$$

Ejemplo 2.4.5. Sea $g = \{(1,4),(2,5),(3,6)\}$ y $f = \{(3,8),(4,9),(5,10)\}$. Encuentre $f \circ g$.

Solución: Note que

$$\begin{aligned} g(1) &= 4 \ \text{ y } (f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(4) = 9 \\ g(2) &= 5 \ \text{ y } (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(5) = 10 \\ g(3) &= 6, \text{ pero } f(6) \text{ no existe, por lo tanto } (f \circ g)(3) \text{ no existe.} \end{aligned}$$

Concluimos que $f \circ g = \{(1,9),(2,10)\}$.

Ejemplo 2.4.6. Sea $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2x - 1$ y $h(x) = x^2$. Encuentre cada una de las siguientes composiciones y diga cual es el dominio de cada una.

1. $f \circ g$.

   Solución: Note que

   $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-1) = \sqrt{2x-1}.$$

   El dominio de esta composición está dado por

   $$\begin{aligned} \operatorname{dom}(f \circ g) &= \{x \in \operatorname{dom}(g) \,|\, g(x) \in \operatorname{dom}(f)\} \\ &= \{x \in (-\infty, \infty) \,|\, 2x - 1 \in [0, \infty)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, 2x - 1 \geq 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq \frac{1}{2}\right\} \\ &= \left[\frac{1}{2}, \infty\right). \end{aligned}$$

2. $g \circ f$.

   Solución: Note que

   $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} - 1.$$

   El dominio de esta composición está dado por

   $$\begin{aligned} \operatorname{dom}(g \circ f) &= \{x \in \operatorname{dom}(f) \,|\, f(x) \in \operatorname{dom}(g)\} \\ &= \{x \in [0, \infty) \,|\, 2\sqrt{x} - 1 \in (-\infty, \infty)\} \\ &= [0, \infty)\,. \end{aligned}$$

3. $h \circ g$.

   Solución: Note que

   $$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(2x-1) = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1.$$

El dominio de esta composición está dado por

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dom}(h \circ g) &= \{x \in \operatorname{dom}(g) \mid g(x) \in \operatorname{dom}(h)\} \\
&= \{x \in (-\infty, \infty) \mid 2x - 1 \in (-\infty, \infty)\} \\
&= (-\infty, \infty).
\end{aligned}
$$

4. $f \circ h$.

   Solución: Note que

$$
(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|.
$$

   El dominio de esta composición está dado por

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dom}(f \circ h) &= \{x \in \operatorname{dom}(h) \mid h(x) \in \operatorname{dom}(f)\} \\
&= \{x \in (-\infty, \infty) \mid x^2 \in [0, \infty)\} \\
&= (-\infty, \infty).
\end{aligned}
$$

5. $f \circ g \circ h$.

   Solución: Note que

$$
(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x^2)) = f(2x^2 - 1)\sqrt{2x^2 - 1}.
$$

   El dominio de esta composición está dado por

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dom}(f \circ g \circ h) &= \{x \in \operatorname{dom}(h) \mid h(x) \in \operatorname{dom}(g) \,\&\, g(h(x)) \in \mathrm{f}\} \\
&= \{x \in (-\infty, \infty) \mid x^2 \in (-\infty, \infty) \,\&\, 2x^2 - 1 \in [0, \infty)\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \geq 0\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq \frac{1}{2}\right\} \\
&= (-\infty, -\sqrt{2}/2] \cup [\sqrt{2}/2, \infty).
\end{aligned}
$$