Programa Inmersión, Verano 2024
Notas escritas por Dr. M

Notas del cursos. Basadas en los prontuarios de MATE 3001 y MATE 3171

Clase #17: miércoles, 17 de julio de 2024.

2 Funciones y gráficas

2.5 Funciones inversas

En ocasiones es posible que una función deshaga lo que otra función hace. Por ejemplo, si consideramos los reales positivos, entonces cuadrar deshace lo que hace tomar la raíz cuadrada. Note que la composición de estas funciones nos de la función identidad.

Funciones uno a uno

Definición 2.5.1. Si f es una función tal que a toda y en el campo de valores le corresponde exactamente una x en el dominio, entonces decimos que la función es uno a uno. En otras palabras, si

$$f(a) = f(b), \text{ entonces } a = b.$$

Ejemplo 2.5.2. Determine cual de las siguientes funciones es uno a uno.

1. $\{(1,3),(2,5),(3,4),(4,9),(5,0)\}$.

   Solución: Esta función es uno a uno, pues no existe un par ordenado con dos diferentes coordenadas de x, pero una misma coordenada de y.

2. $\{(4,16),(-4,16),(2,4),(-2,4),(5,25)\}$.

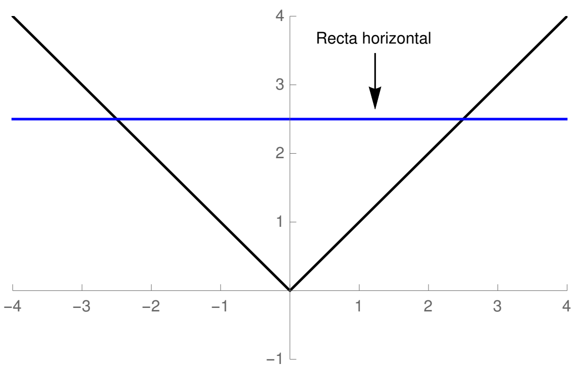
   Solución: Esta función NO es uno a uno, pues note que 16 está en el campo de valores, pero existen dos elementos en el dominio, i.e. ± 4, que le corresponden.

3. $f(x) = 3x + 2$.

   Solución: Suponga que $f(a) = f(b)$. Entonces,

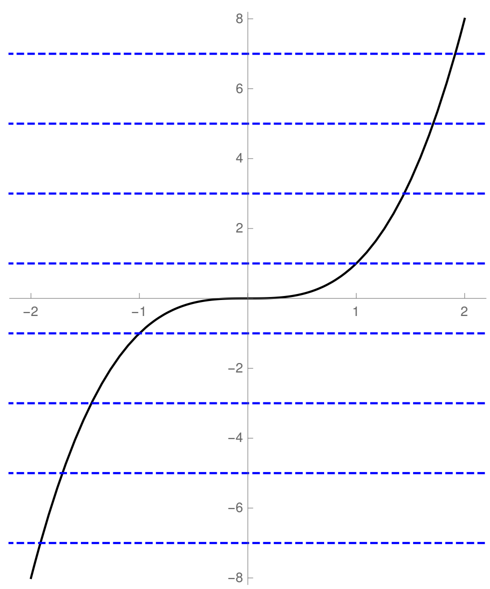
$$\begin{aligned} f(a) &= f(b) \\ 3a + 2 &= 3b + 2 \\ 3a &= 3b \\ a &= b. \end{aligned}$$

   Como $f(a) = f(b)$ implica $a = b$, entonces f es uno a uno.



Teorema 2.5.3 (Regla de la recta horizontal)**.** Si cada recta horizontal interseca la gráfica de la función en no más de un punto, entonces la función es uno a uno.

Ejemplo 2.5.4. Considere la función $f(x) = |x|$. Note que si graficamos la función, entonces tenemos
Por lo tanto, la función $f(x)$ no es uno a uno. Considere ahora la función $g(x) = x^3$. Note que



Es claro que ninguna recta horizontal interseca la función $g(x)$ en más de un punto, por lo tanto, $g(x)$ es uno a uno.

Ejemplo 2.5.5. Utilice la definición para determinar si cuales de las siguientes funciones es uno a uno

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-3}, \qquad g(x) = x^2 + 2.$$

Solución: Considere primero la función $f(x)$. Suponga que $f(a) = f(b)$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b) \\ \frac{2a+1}{a-3} &= \frac{2b+1}{b-3} \\ (b-3)(2a+1) &= (2b+1)(a-3) \\ 2ab - 6a + b - 3 &= 2ab - 6b + a - 3 \\ 7b &= 7a \\ b &= a. \end{aligned}$$

Como $f(a) = f(b)$ implica $a = b$, entonces concluimos que f es uno a uno.

Considere ahora $g(x)$. Note que $g(-1) = (-1)^2 + 2 = 3 = 1^2 + 2 = g(1)$, pero $-1 \neq 1$. Concluimos que g no es uno a uno.

Funciones inversas

Una función es un conjunto de pares ordenados en el cual no existe un par de pares ordenados que tengan la misma coordenada de x, pero distintas coordenadas de y. Si intercambiamos la coordenada de x con la coordenada de y, entonces obtenemos un conjunto de pares ordenados que puede ser o no una función. Ahora bien, si la función original es uno a uno, entonces el conjunto que se obtiene intercambiando coordenadas es también una función. Si una función es uno a uno, entonces tiene una función inversa.

Definición 2.5.6. La función inversa de una función $f(x)$ que es uno a uno es la función $f^{-1}(x)$ donde cada par ordenado de f^{-1} se obtiene intercambiando las coordenadas de un par ordenado en f.

Ejemplo 2.5.7. Para cada función, determine si la función es invertible (si tiene inversa). De ser invertible, encuentre la inversa.

1. $f = \{(-2, 3), (4, 5), (2, 3)\}$

   Solución: Esta función no es invertible, pues no es uno a uno. Note que $3 = f(-2) = f(2)$, pero $-2 \neq 2$.

2. $g = \{(3, 1), (5, 2), (7, 4), (9, 8)\}$

   Solución: Note que esta función es invertible, pues es uno a uno. La inversa está dada por
   $$g^{-1} = \{(1, 3), (2, 5), (4, 7), (8, 9)\}.$$

Dada una función $f(x)$, ¿como podemos conseguir la inversa de $f(x)$ de manera algebraica? Para conseguir la inversa, siga estos pasos:

1. Reemplace x por y en $f(x)$, esto es, considere $f(y)$.

2. Resuelva la ecuación $f(y) = x$ para y.

3. El resultado que obtenga para y es la inversa de la función.

Por ejemplo, anteriormente habíamos demostrado que $f(x) = 3x + 2$ es uno a uno, por lo tanto, esta función es invertible. Para conseguir la inversa, note que

$$\begin{aligned} f(y) &= x \\ 3y + 2 &= x \\ 3y &= x - 2 \\ y &= \frac{x-2}{3}. \end{aligned}$$

Concluimos que la inversa de esta función es $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$.

Ejemplo 2.5.8. Encuentre la inversa de $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$.

Solución: Sabemos que esta función es invertible, pues ya demostramos anteriormente que es uno a uno. Ahora bien,

$$\begin{aligned} f(y) &= x \\ \frac{2y+1}{y-3} &= x \\ 2y + 1 &= x(y-3) \\ 2y + 1 &= xy - 3x \\ 2y - xy &= -3x - 1 \\ y(2-x) &= -3x - 1 \\ y &= \frac{-3x-1}{2-x} = \frac{3x+1}{x-2}. \end{aligned}$$

Concluimos que $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$.

<u>Gráfica de la función inversa</u>

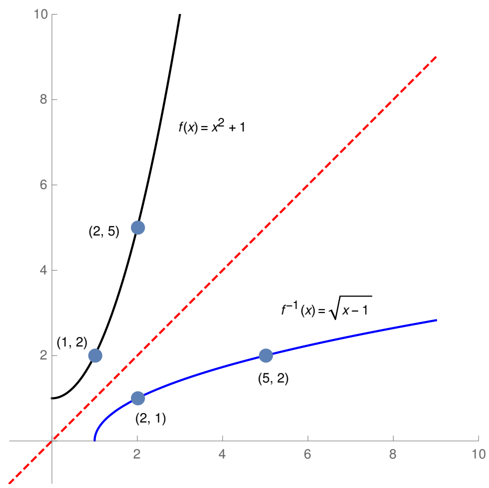
Considere la función

$$f(x) = x^2 + 1,$$

para $x \geq 0$. Para calcular su inversa, note que

$$\begin{aligned} f(y) &= x \\ y^2 + 1 &= x \\ y^2 &= x - 1 \\ y &= \sqrt{x-1}. \end{aligned}$$

Grafiquemos estas funciones.



Note que existe simetría con respecto a la recta $y = x$. Esto no es casualidad, en realidad tenemos el siguiente resultado.

Propiedad de Reflexión de las funciones inversas. Si f es una función uno a uno, entonces la gráfica de la inversa f^{-1} es un reflexión de la gráfica de f con respecto a la recta $y = x$.

2.6 Construcción de funciones con variación

<u>Variación directa</u>

Si salvamos 3 yardas cúbicas de tierra por cada tonelada de papel que reciclamos, entonces el volumen V de espacio salvado es una función lineal del número de toneladas recicladas n, $V = 3n$. Si n es 20 toneladas, entonces V es 60 yardas cúbicas. Si n se duplica a 40, entonces V se duplica también para obtener 120 yardas cúbicas. Si n se triplica, entonces V también se triplica. Esta relación se llama variación directa.

Definición 2.6.1. El enunciado y varía directamente con x o y es directamente proporcional a x significa que

$$y = kx,$$

para algún $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. La constante k se llama la constante de variación o constante de proporción.

Ejemplo 2.6.2. El costo C de una casa en un barrio de Caguas es directamente proporcional al tamaño de la casa s. Si una casa de 2850 pies cuadrados cuesta \$182,400, entonces ¿cuál es el costo de una casa de 3640 pies cuadrados?

Solución: Como sabemos que C es directamente proporcional a s, entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$C = ks.$$

Ahora, nos dicen que cuando $s = 2850$, entonces $C = \$182,400$, por lo tanto

$$\begin{aligned} 182400 &= k(2850) \\ 64 &= k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el costo de una casa es \$64 por pies cuadrados. Entonces, para conseguir el costo de una casa de 3640 pies cuadrados, usamos la fórmula $C = 64s$. Note que

$$C = 64(3640) = 232,960.$$

La casa de 3640 pies cuadrados cuesta \$232,960.

Variación inversa

El tiempo que toma hacer el viaje de 3470 millas (por aire) de Nueva York a Londres es una función de la rapidez del avión, $T = 3470/r$. Un avión Boeing 747 con rapidez promedio de 675 mph le toma 5 horas hacer el vuelo. El avión Concorde, que viaje al doble de rapidez a 1350 mph, le toma la mitad del tiempo, i.e. 2.5 horas. Si vas en un avión que viaja tres veces más rápido que el Boeing 747, entonces puedes hacer el viaje en un tercio del tiempo. Esta relación se llama variación inversa.

Definición 2.6.3. El enunciado y varía inversamente con x o y es inversamente proporcional a x, significa que

$$y = \frac{k}{x},$$

para algún $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

Ejemplo 2.6.4. El tiempo que toma remover todos los carteles de una campaña des-pués de una elección en Yabucoa varía inversamente con el número de voluntarios que trabajan en esta tarea. Si a 12 voluntarios le toma 7 días completar el trabajo, entonces ¿cuántos días le toma a 15 voluntarios?

Solución: Como T varía inversamente con el número de voluntarios n, entonces existe k tal que

$$T = \frac{k}{n}.$$

Sabemos que $T = 7$ cuando $n = 12$, por lo tanto

$$\begin{aligned} 7 &= \frac{k}{12} \\ 84 &= k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fórmula está dada por $T = 84/n$. Ahora, si $n = 15$, entonces

$$T = \frac{84}{15} = 5.6.$$

Concluimos que a 15 voluntarios le tomará 5.6 días remover los carteles políticos.

3 Polinomios y funciones racionales

3.1 Funciones cuadráticas y desigualdades

Una función cuadrática tiene la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde $a \neq 0$. En secciones pasadas trabajamos con técnicas de encontrar ceros de estas funciones. En esta sección aprenderemos a graficar este tipo de funciones y trabajaremos con algunas aplicaciones de éstas.

<u>Dos formas de escribir funciones cuadráticas</u>

En muchas aplicaciones es útil escribir una función cuadrática en la forma

$$f(x) = a(x-h)^2 + k.$$

Observe que si una función está escrita en la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, entonces es fácil convertirla en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ (expandiendo $a(x-h)^2 + k$). Ir en la dirección opuesta puede producirse aplicando la técnica de completar el cuadrado. Suponga que tenemos $f(x) = ax^2 + bx + c$. Note que

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \text{ (completando cuadrados)} \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\
&= a(x-h)^2 + k,
\end{aligned}$$

donde

$$h = -\frac{b}{2a} \quad \text{y} \quad k = -a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c.$$

Ejemplo 3.1.1. Escriba cada una de las siguientes funciones cuadráticas en la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$.

1. $f(x) = x^2 + 6x$.

   Solución: Complete el cuadrado para obtener

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 + 6x \\
f(x) &= (x^2 + 6x + 9) - 9 \\
f(x) &= (x+3)^2 - 9.
\end{aligned}$$

2. $f(x) = 2x^2 + 20x + 3$.

Solución: Observe que

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 20x + 3 \\ &= 2(x^2 + 10x) + 3 \\ &= 2(x^2 + 10x + 25 - 25) + 3 \\ &= 2((x+5)^2 - 25) + 3 \\ &= 2(x+5)^2 - 50 + 3 \\ &= 2(x+5)^2 - 47. \end{aligned}$$

3. $f(x) = 2x^2 - 7x + 9$.

   Solución: Note que

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 7x + 9 \\ &= 2\left(x^2 - \frac{7}{2}x\right) + 9 \\ &= 2\left(x^2 - \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2\right) + 9 \\ &= 2\left(\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right) + 9 \\ &= 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{8} + 9 \\ &= 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{8} + \frac{72}{8} \\ &= 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}. \end{aligned}$$

Note que el hecho de que una función cuadrática puede escribirse de la forma

$$a(x-h)^2 + k$$

implica que tenemos el siguiente resultado.

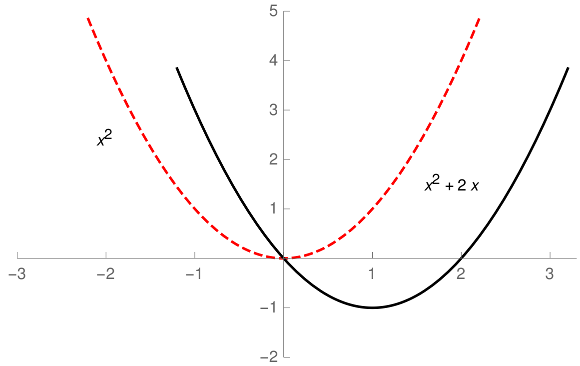
Teorema 3.1.2. La gráfica de cualquier función cuadrática es una transformación de la gráfica de $f(x) = x^2$.

Ejemplo 3.1.3. Grafique la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x$.

Solución: Primero observe que la función $f(x) = x^2 + 2x$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x \\ f(x) &= x^2 - 2x + 1 - 1 \\ f(x) &= (x-1)^2 - 1. \end{aligned}$$

Ahora es claro que la gráfica de la función $f(x)$ es una traslación horizontal de una unidad hacia la derecha de la gráfica de x^2, seguida por una traslación vertical de una unidad hacia arriba.



Apertura, vértice y eje de simetría

Si $a > 0$, la gráfica de $f(x) = a(x-h)^2 + k$ se abre hacia arriba. Por otro lado, si $a < 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ se abre hacia abajo. La h determina la cantidad de traslación horizontal y k determina la cantidad de traslación vertical de la gráfica de x^2. También note que el punto $(0,0)$ en la gráfica de x^2 se mueve al punto (h,k) en la gráfica de $f(x)$. Como $(0,0)$ es el punto mínimo de la gráfica de x^2 y $(0,0)$ es el punto máximo de la gráfica de $-x^2$, entonces, si $a > 0$, entonces (h,k) es el punto mínimo de la gráfica de $f(x)$ y si $a < 0$, entonces (h,k) es el punto máximo de la grafica de $f(x)$. El punto (h,k) se llama el vértice de la parábola. La forma

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

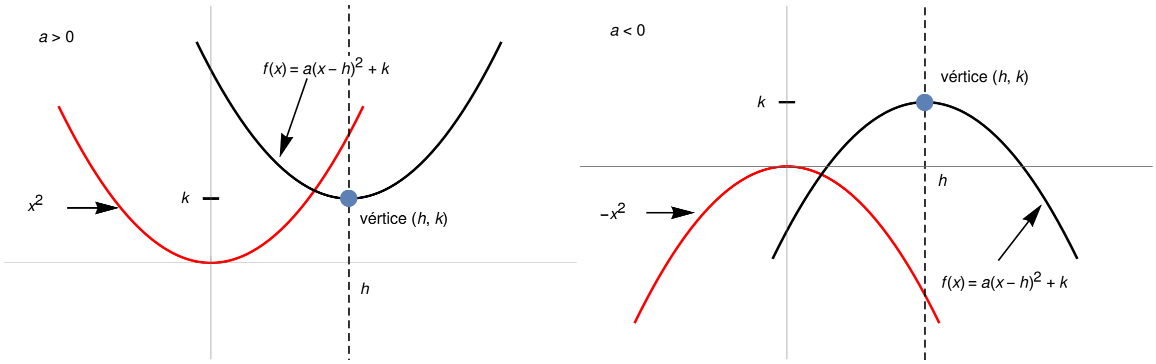
se llama forma de vértice, mientras la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

se llama forma general.

La gráfica de x^2 es simétrica alrededor del eje de y. Esta simetría se preserva en transformaciones, por lo tanto, la gráfica de cualquier función cuadrática es simétrica alrededor de la recta vertical que pasa por el vértice. Esta recta la llamamos eje de simetría de la parábola. La ecuación del eje de simetría es $x = h$ o $x = -b/(2a)$, pues $h = -b/(2a)$ cuando la función está escrita en forma general.

A continuación una representación gráfica de la discusión de arriba.



Resumen:

Vértice de una parábola:

1. Para una función cuadrática escrita en la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, el vértice de la parábola es (h, k).

2. Para una función cuadrática escrita en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, la coordenada de x del vértice es $-b/(2a)$, mientras la coordenada de y es $f(-b/(2a))$.

Ejemplo 3.1.4. Encuentre el vértice de las siguiente parábola $f(x) = -2x^2 - 4x + 3$.

Solución: Note que la coordenada de x del vértice está dada por

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{(-4)}{2(-2)} = -1. \end{aligned}$$

La coordenada de y del vértice está dada por

$$\begin{aligned} y &= f(-1) \\ &= -2(-1)^2 - 4(-1) + 3 = 5. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el vértice es $(-1, 5)$.

Interceptos

La gráfica que $y = ax^2 + bx + c$ siempre tiene un intercepto en y. Este intercepto está dado por $(0, c)$ y puede conseguirse reemplazando x por 0. La historia para los interceptos en x es distinta, pues puede que $f(x)$ tenga o no interceptos en x. Esto último depende de si existen o no soluciones a

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Por lo tanto, si existe(n) intercepto(s) en x, este(os) está(n) dado(s) por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ejemplo 3.1.5. Encuentre los interceptos en y y en x de las siguientes parábolas.

1. $y = -2(x+4)^2 - 8$.

   Solución: Si $x = 0$, entonces $y = -2(0+4)^2 - 8 = -40$. Por lo tanto, el intercepto en y está dado por $(0, -40)$. Para encontrar los interceptos en x, tenemos que resolver $f(x) = 0$. Ahora, note que

   $$\begin{aligned} -2(x+4)^2 - 8 &= 0 \\ (x+4)^2 &= -4. \end{aligned}$$

   Esta última ecuación no tiene solución, por lo tanto, esta parábola no tiene intercepto en x.

2. $y = 2x^2 - 4x - 9$.

   Solución: Si $x = 0$, entonces $y = 2(0)^2 - 4(0) - 9 = -9$. Por lo tanto, el intercepto en y está dado por $(0, -9)$. Para encontrar los interceptos en x, tenemos que resolver $f(x) = 0$, o sea que

   $$2x^2 - 4x - 9 = 0.$$

   Utilizando la fórmula cuadrática obtenemos

   $$\begin{aligned} x &= \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(-9)}}{2(2)} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{88}}{4} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{22}}{2}. \end{aligned}$$

   Por lo tanto, los interceptos en x están dados por

   $$\left(\frac{2+\sqrt{22}}{2}, 0 \right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{2-\sqrt{22}}{2}, 0 \right).$$

Desigualdades cuadráticas

En esta parte analizaremos desigualdades cuadráticas. El método que vamos a discutir se conoce como el Método de los Puntos de Prueba.

Ejemplo 3.1.6. Resuelva las siguientes desigualdades.

1. $x^2 - x > 6$.

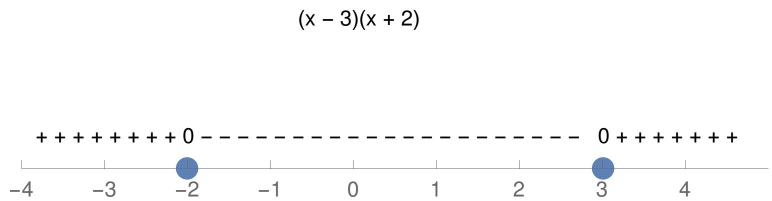
   Solución: Escriba la desigualdad en la forma

   $$x^2 - x - 6 > 0.$$

Ahora resuelva $x^2 - x - 6 = 0$. En este caso, podemos factorizar el polinomio y obtener

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 &= 0 \\ (x-3)(x+2) &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, $x = 3$ o $x = -2$. Lo próximo que hacemos es poner estos puntos (los cuales llamamos puntos de prueba) en la recta real y verificar el signo de la función a la derecha y a la izquierda de cada uno de los puntos de prueba.



Por lo tanto, la solución a la desigualdad $x^2 - x - 6 > 0$ está dada por

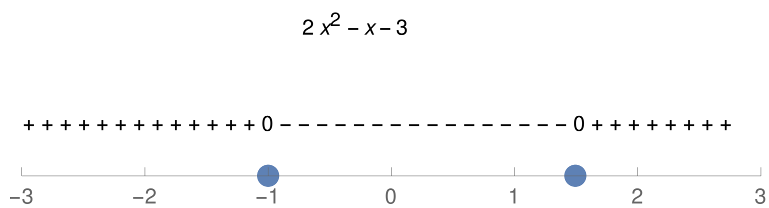
$$(-\infty, 3) \cup (2, \infty).$$

2. $2x^2 - x - 3 \leq 0$.

Solución: Note que $2x^2 - x - 3 = 0$ si y solo si

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-3)}}{2(2)} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} \\ &= -1,\ \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Luego, tenemos



Por lo tanto, la solución a la desigualdad $2x^2 - x - 3 \leq 0$ está dada por

$$\left[-1, \frac{3}{2}\right].$$

Aplicaciones de máximo y mínimo

Ejemplo 3.1.7. Una pelota se tira directamente hacia arriba con velocidad inicial de 80 pies por segundo desde un techo que esta a 12 pies sobre el nivel del piso. La altura de la bola en pies al tiempo t (en segundos) está dado por

$$h(t) = -16t^2 + 80t + 12.$$

Encuentre la altura máxima de la pelota sobre el nivel del piso.

Solución: Como la altura está dada como una función cuadratica de t con coeficiente líder negativo, entonces la altura tiene el máximo en el vértice de la parabola. Ahora, la coordenada de t del vértice está dada por

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{80}{2(-16)} = 2.5.$$

O sea, la pelota llega a su altura máxima cuando $t = 2.5$ segundos. Luego, la altura máxima es

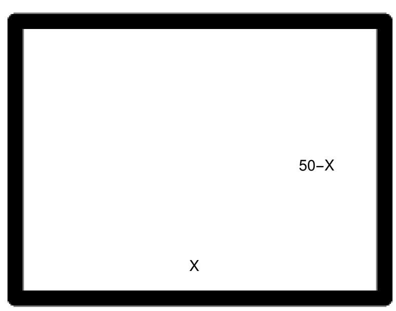
$$h(2.5) = -16(2.5)^2 + 80(2.5) + 12 = 112 \text{ pies}.$$

Ejemplo 3.1.8. Si 100 m de verja van a ser utilizados para cercar una región rectangular, entonces ¿qué dimensiones para el rectángulo maximizan el área de la región?

Solución: Sea x el lado del ancho y y el lado del largo. Entonces,

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 100 \\ 2y &= 100 - 2x \\ y &= 50 - x. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente rectángulo.



Por lo tanto, el área está dado por

$$A = x(50 - x) = 50x - x^2.$$

Ahora, el máximo de esta parábola está en el vértice. La coordenada de x está dada por

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{50}{2(-1)} = 25.$$

Por lo tanto, en ancho es 25 m y el largo $50 - 25 = 25$ m. El área máxima está dada por $25^2 = 624\text{m}^2$.