Programa Inmersión, Verano 2024
Notas escritas por Dr. M

Notas del cursos. Basadas en los prontuarios de MATE 3001 y MATE 3171

Clase #18: jueves, 18 de julio de 2024.

3 Polinomios y funciones racionales

3.6 Funciones racionales y desigualdades

Funciones racionales y sus dominios

Definición 3.6.1. Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, entonces una función de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se llama función racional, dado que $Q(x)$ no es el polinomio cero.

Por discusiones anteriores sabemos que el dominio de un cociente

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

está dado por

$$\operatorname{dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g) \mid g(x) \neq 0\}.$$

Note que el dominio de $P(x)$ y de $Q(x)$ es $(-\infty, \infty)$, pues ambos son polinomios. Por lo tanto, el dominio de una función racional es

$$\{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}.$$

Ejemplo 3.6.2. Encuentre el dominio de las siguientes funciones racionales.

1. $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$.

   Solución: Note que el dominio está dado por

   $$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\} = (-\infty, 2) \cup (2, \infty).$$

2. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-4}$.

   Solución: Note que $x^2 - 4 = 0$ si y solo si $x = \pm 2$. Por lo tanto, el dominio está dado por

   $$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty).$$

Asíntotas horizontales y verticales

Considere la función $f(x) = 1/x$. Note que esta función es diferente a un polinomio. De entrada, el dominio de esta función es todos los reales excepto el 0, mientras que el dominio de cualquier polinomio es todo $\mathbb{R}$. Analicemos el comportamiento de esta función cerca de 0.

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$y = 1/x$	-10	-100	-1000		1000	100	10

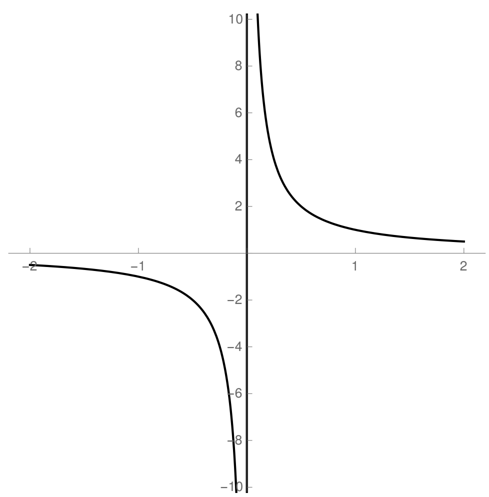
Note que si nos acercamos a 0 por la derecha, entonces el valor de la función crece sin cota, o sea, cuando $x \to 0^+$ (se lee, cuando x se acerca a 0 por la derecha), entonces $1/x \to \infty$. En notación de límites escribimos

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$$

Por otro lado, si nos acercamos a 0 por la izquierda, esto es, si $x \to 0^-$ (se lee, cuando x se acerca a 0 por la izquierda), entonces $1/x \to \infty$. En otras palabras,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Esta discusión se puede apreciar en la gráfica de $1/x$.



Note que la función se acerca al eje de y ($x = 0$), pero nunca lo toca. Decimos que el eje de y o $x = 0$ es una asíntota vertical para $1/x$.

Por otro lado, cuando x crece en magnitud, el valor de la función se acerca a 0. Por ejemplo En notación de límites, escribimos

x	-1000	-100	-10	0	10	100	1000
$y = 1/x$	-0.001	-0.01	-0.1		0.1	0.01	0.001

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

En este caso decimos que $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Definición 3.6.3. Sea $f(x) = P(x)/Q(x)$ una función racinal.

1. Si $|f(x)| \to \infty$ cuando $x \to a$, entonces la recta vertical $x = a$ es una asíntota vertical. En notación de límites, decimos que $x = a$ es una asíntota vertical si
$$\lim_{x \to a} |f(x)| = \infty.$$
2. La recta $y = L$ es una asíntota horizontal si $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$. En notación de límites, $y = L$ es una asíntota horizontal si
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Ejemplo 3.6.4. Encuentre las asíntotas verticales y horizontales de las siguientes funciones racionales.

1. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 1}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$
3. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 3}$

Desigualdades polinomiales

Como parte de los trabajos de esta sección, trabajaremos con desigualdades que envuelven funciones racionales. De la misma forma que un entero es un número racional, también es cierto que un polinomio es una función racional. Por lo tanto, primero trabajaremos con desigualdades polinomiales.

Anteriormente trabajamos con dos tipos de desigualdades polinomiales especiales: lineales y cuadráticas. El próximo paso es desigualdades polinomiales con grado 3 o más. Nuestro libro trata estas desigualdades en la sección 3.5 y no en la sección 3.6, como se indica arriba. Dicho esto, como desigualdades polinomiales es el único tópico de la sección 3.5 que vamos a cubrir, entonces lo incluimos como parte de esta sección.

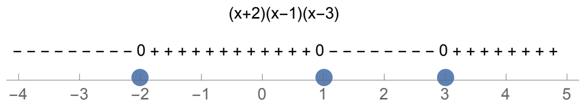
Las desigualdades polinomiales se trabajan de forma similar a las desigualdades cuadráticas. Es más, la técnica a utilizar lleva el mismo nombre, i.e. el Método de los Puntos de Prueba. Ahora bien, para poder aplicar este método, tenemos que poder factorizar o encontrar ceros de polinomios. Desafortunadamente no existe una fórmula similar a la fórmula cuadrática cuando el grado del polinomio es 5 o más, por lo tanto este método no siempre funciona. Agraciadamente para nosotros, existen métodos que, en ocasiones especiales, nos permite factorizar polinomios cuando los coeficientes de éste son racionales. Estos métodos los verá en el curso MATE 3024 (Precálculo 2). Sin embargo, practicaremos el Método de los Puntos de Prueba con polinomios completamente factorizados o con factorizaciones simples.

Ejemplo 3.6.5. Resuelva las siguientes desigualdades.

1. $(x + 2)(x - 1)(x - 3) < 0$.

   Solución: Note que el polinomio $(x + 2)(x - 1)(x - 3) = 0$ cuando $x = -2, 1, 3$, por lo tanto, estos son los puntos de prueba.

Note que



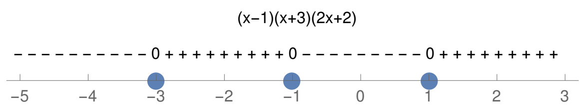
Concluimos que el conjunto solución es $(\infty, -2) \cup (1, 3)$.

2. $(x-1)^2(x+3) + (x-1)(x+3)^2 \geq 0$.

   Solución: Primero observe que

$$\begin{aligned} (x-1)^2(x+3) + (x-1)(x+3)^2 &= (x-1)(x+3)[(x-1)+(x+3)] \\ &= (x-1)(x+3)(2x+2). \end{aligned}$$

   Por lo tanto, los puntos de prueba son $x = -3, -1, 1$. Observe que



   Concluimos que el conjunto solución a la desigualdad está dado por

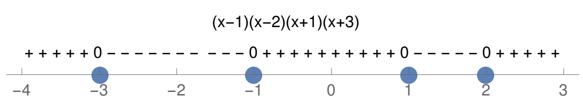
$$[-3, -1] \cup [1, \infty).$$

3. $(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 4x + 3) \leq 0$.

   Solución: Primero observe que

$$(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 4x + 3) = (x-1)(x-2)(x+1)(x+3).$$

   Por lo tanto, los puntos de prueba son $x = -3, -1, 1, 2$. Observe que



   Concluimos que el conjunto solución a la desigualdad está dado por

$$[-3, -1] \cup [1, 2].$$

4. $x^4 - 8x^2 + 43 > 5x^2 + 7$

   Solución: Primero observe que esta desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$\begin{aligned} x^4 - 8x^2 + 43 - (5x^2 + 7) &> 0 \\ x^4 - 13x^2 + 36 &> 0. \end{aligned}$$

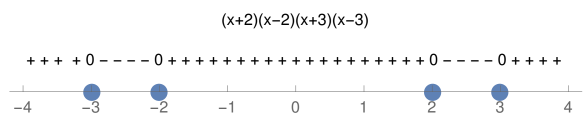
Ahora procedemos a conseguir los puntos de prueba. Para esto, necesitamos resolver la igualdad

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Observe ahora que si $z = x^2$, entonces tenemos.

$$\begin{aligned}
x^4 - 13x^2 + 36 &= 0 \\
z^2 - 13z + 36 &= 0 \\
(z-4)(z-9) &= 0 \\
(x^2-4)(x^2-9) &= 0 \\
(x+2)(x-2)(x+3)(x-3) &= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los puntos de prueba son $x = -3, -2, 2, 3$. Observe que



Concluimos que el conjunto solución a la desigualdad $x^4 - 8x^2 + 43 > 5x^2 + 7$ es

$$(-\infty, 4) \cup (-2, 2) \cup (3, \infty).$$

El Método de los Puntos de Pruebra puede también utilizarse para determinar el conjunto solución de desigualdades que contienen funciones racionales.

Ejemplo 3.6.6. Resuelva las siguientes desigualdades.

1. $\dfrac{x-1}{x^2-9} \leq 0.$

   Solución: Similar a los polinomios, los puntos en los cuales la función es cero son puntos de prueba. Recuerde que una función racional es cero cuando su numerador es cero, por lo tanto los puntos donde el numerador es cero son puntos de prueba. Ahora, cuando trabajemos con funciones racionales, también tenemos que considerar como puntos de prueba aquellos en los cuales la función no está definida, esto es, los puntos en los cuales el denominador es cero.

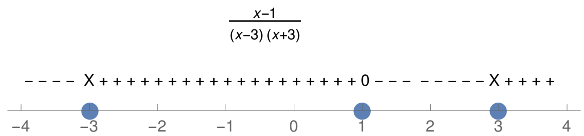
   Observe que nuestra función racional es

   $$\frac{x-1}{x^2-9} = \frac{x-1}{(x-3)(x+3)}.$$

   Por lo tanto, nuestros puntos de prueba son

   $$\begin{aligned}
   x = 1, &\quad \text{porque el numerador es cero en este punto.} \\
   x = -3, &\quad \text{porque el denominador es cero en este punto.} \\
   x = 3, &\quad \text{porque el denominador es cero en este punto.}
   \end{aligned}$$

Note que



Por lo tanto, el conjunto solución está dado por

$$(-\infty, -3) \cup [1, 3).$$

2. $\dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3} \geq \dfrac{4}{x^2 - 4x + 3}$.

Solución: Note que la desigualdad es equivalente a

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} &\geq \frac{4}{x^2 - 4x + 3} \\
\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 3} &\geq 0 \\
\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-3)} &\geq 0.
\end{aligned}$$

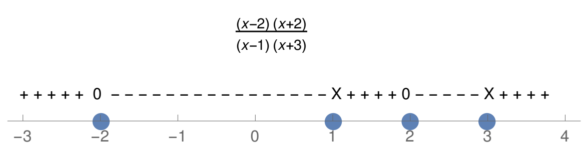
Entonces, nuestra función racional es

$$\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-3)}$$

Por lo tanto, nuestros puntos de prueba son

$$\begin{aligned}
x = -2, &\qquad \text{porque el numerador es cero en este punto.} \\
x = 2, &\qquad \text{porque el numerador es cero en este punto.} \\
x = 1, &\qquad \text{porque el denominador es cero en este punto.} \\
x = 3, &\qquad \text{porque el denominador es cero en este punto.}
\end{aligned}$$

Observe que



Por lo tanto, el conjunto solución está dado por

$$(-\infty, -2] \cup (1, 2] \cup (3, \infty).$$

Ahora que sabemos obtener las asíntotas (horizontales y verticales) de una función racional y ahora que tenemos el método de puntos de prueba, mejorar nuestra técnica de traza de gráfica para funciones racionales. En esta clase nos concentraremos en funciones racionales de la forma

$$\frac{ax+b}{cx+d}.$$

Para graficar otro tipo de funciones racionales, necesitará técnicas avanzadas (como lo es el Cálculo) para este curso.

Ejemplo 3.6.7. Grafique las siguientes funciones.

1. $\dfrac{2x+4}{x-1}$.

   Solución: Primero buscaremos las asíntotas horizontales y verticales de esta función.

   Asíntotas horizontales.

   Note que nuestra función puede escribirse como

   $$\frac{2x+4}{x-1} = \frac{2+4/x}{1-1/x}.$$

   Es claro que si $x \to \pm\infty$, entonces $4/x \to 0$ y $1/x \to 0$. Por lo tanto, cuando $x \to \pm\infty$, entonces

   $$\frac{2x+4}{x-1} = \frac{2+4/x}{1-1/x} \to \frac{2}{1} = 2.$$

   Concluimos que la función tiene una asíntota horizontal en $y = 2$.

   Asíntotas verticales.

   Para encontrar las asíntotas verticales, necesitamos encontrar valores c de x tal que cuando $x \to c$, la función $|f(x)| \to \infty$. En este caso, observe que si $c = 1$, entonces, cuando $x \to 1$, tenemos

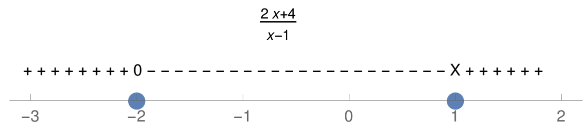
   $$\left|\frac{2x+4}{x-1}\right| \to \infty.$$

   Por lo tanto, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

   Ahora buscaremos los puntos donde la función es cero y los intervalos donde la función es positiva y negativa. Para lograr esto, utilizaremos el método de puntos de prueba. Note que los puntos de prueba están dados por

   $$\begin{aligned} x &= -2, && \text{porque el numerador es cero en este punto.} \\ x &= 1, && \text{porque el denominador es cero en este punto.} \end{aligned}$$

   Aplique el método de puntos de prueba para obtener



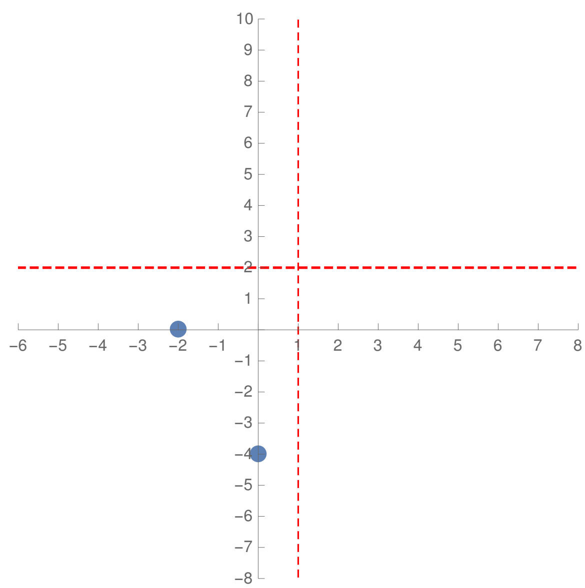
Concluimos que la función es positiva en $(-\infty, 2) \cup (1, \infty)$ y negativa en $(-2, 1)$.

Ya que tenemos las asíntotas y los intervalos donde la función es positiva y negativa, entonces continuamos con la identificación de los cortes de los ejes de x y y. El corte en el eje de x ya lo tenemos, pues la función es cero cuando $x = -2$. En otras palabras, el punto $(-2, 0)$ es el corte en el ejde de x de la función. Para encontrar el corte en el eje de y, reemplazamos x con 0

$$\frac{2(0) + 4}{0 - 1} = -4.$$

Concluimos que el corte en el eje de y se encuentra en $(0, -4)$.

Ahora que tenemos toda esta información, procedemos a graficar la función. Lo primero que haremos es graficar las asíntotas en entrecortado ($y = 2$ horizontal, $x = 1$ vertical) e identificar los puntos $(-2, 0)$ y $(0, -4)$, los cuales son el corte en el eje de x y el corte en el eje de y (resp.) de la función



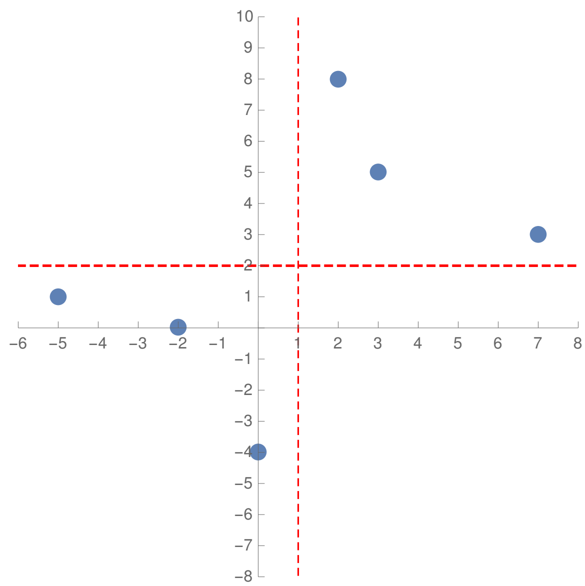
Observe que ya tenemos dos puntos a la izquierda de la asíntota vertical, pero ninguno a la derecha de ésta. Por lo tanto, el siguiente paso es conseguir varios puntos que estén a la derecha de esta asíntota. Escoja $x = 2$, $x = 3$ y $x = 7$ (pudo haber escogido otros puntos). Entonces, tenemos los puntos

$$\begin{aligned} (2, f(2)) &= (2, 8) \\ (3, f(3)) &= (3, 5) \\ (7, f(7)) &= (7, 3), \end{aligned}$$

los cuales están a la derecha de la asíntota $x = 1$. Escoja otro punto, esta vez a la izquierda del cero de la función (ésto es para guiarse, no es necesario). Digamos que escojemos el punto

$$(-5, f(-5)) = (-5, 1),$$

el cual está a la izquierda de $(-2, 0)$, el cual es el cero de la función. Grafique estos puntos para obtener.



Ahora viene la última fase, dibujar la representación gráfica. Conecte los puntos en curva (de ser necesario, añada puntos de la gráfica en el plano) recordando que:

(a) La gráfica tiene una asíntota horizontal en $y = 2$. O sea, cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$, la gráfica de $f(x)$ se acerca a esta recta.

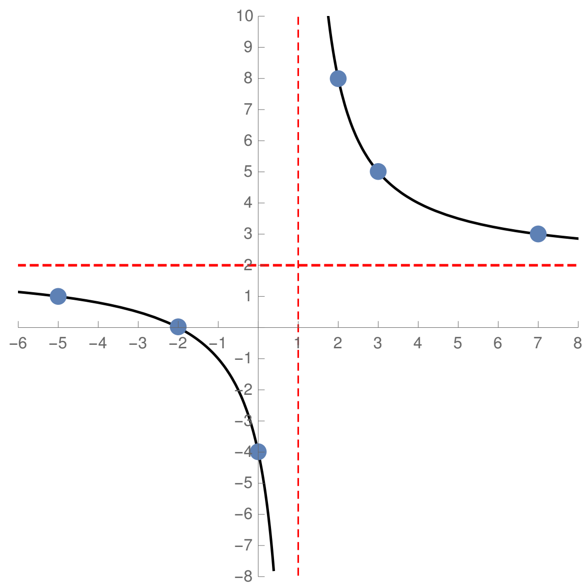
(b) La gráfica tiene una asíntota vertical en $x = 1$. O sea, cuando $x \to 1$, entonces el valor absoluto $|f(x)|$ crece (o sea, $f(x) \to \infty$ o $f(x) \to -\infty$, dependiendo de la función y de como x se acerca a 1, i.e. por la izquierda o por la derecha).

(c) La función es positiva en $(-\infty, 2) \cup (1, \infty)$ y negativa en $(-2, 1)$.

La representación gráfica está en el tope de la siguiente página.

2. Reto: grafique $\dfrac{3x-6}{2x-6}$.

3. Reto: grafique $\dfrac{1-x}{3x-9}$.



11 Secuencias, Series y Probabilidad

11.1 Secuencias

En nuestra vida diaria, estamos acostumbrados a escuchar la palabra secuencia. Por ejemplo, cuando hacemos los pagos del carro en secuencia, o cuando decimos que ciertos acontecimientos ocurrieron en secuencia. En esta sección, daremos una definición matemática al término secuencia.

Podemos pensar en una secuencia como una lista ordenada. Por ejemplo, tus notas en los primeros tres exámenes del Programa Inmersión es una secuencia. También, la lista

$$10, 20, 30, 40, 50, \cdots$$

es una secuencia (infinita). Esta última secuencia representa los multiplos de 10.

Definición 11.1.1. Una secuencia finita es una función cuyo dominio es $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ para algún entero fijo n. Una secuencia infinita es una función cuyo dominio es el conjunto de todos los naturales.

Ejemplo 11.1.2. La función $f(n) = n^2$ con dominio $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ es una secuencia finita. En este caso, la podemos enlistar como

$$1, 4, 9, 16, 25.$$

La función $f(n) = 2n - 1$ con dominio $\mathbb{N}$ es una secuencia infinita. En este caso, la podemos enlistar como

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \cdots.$$

Para la variable dependiente $f(n)$, generalmente escribimos a_n. Por ejemplo, la secuencia finita $f(n) = n^2$ con dominio $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, la representamos como

$$a_n = n^2, \quad 1 \leq n \leq 5.$$

Los términos de la secuencia son los valores de la variabla dependiente a_n. Llamamos a_n el n-ésimo término o término general de la secuencia. Por ejemplo, la secuencia

$$a_n = n^2, \quad 1 \leq n \leq 5$$

tiene los siguientes términos

$$\begin{aligned} a_1 &= 1^2 = 1 \\ a_2 &= 2^2 = 4 \\ a_3 &= 3^2 = 9 \\ a_4 &= 4^2 = 16 \\ a_5 &= 5^2 = 25, \end{aligned}$$

mientras la secuencia infinita $a_n = 2n - 1$ tiene los términos

$$\begin{aligned} a_1 &= 2(1) - 1 = 1 \\ a_2 &= 2(2) - 1 = 3 \\ a_3 &= 2(3) - 1 = 5 \\ a_4 &= 2(4) - 1 = 7 \\ a_5 &= 2(5) - 1 = 9 \\ a_6 &= 2(6) - 1 = 11 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ejemplo 11.1.3. Encuentre los primeros cuatro términos de la siguiente secuencia infinita

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}2^n}{n}$$

Solución: Observe que

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(-1)^{1-1}2^1}{1} = 2, \quad a_2 = \frac{(-1)^{2-1}2^2}{2} = -2 \\ a_3 &= \frac{(-1)^{3-1}2^3}{3} = \frac{8}{3}, \quad a_4 = \frac{(-1)^{4-1}2^4}{4} = -4. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los primeros cuatro términos de la secuencia son $2, -2, 8/3, -4$.

Notación de factorial

Productos de enteros positivos consecutismo ocurren de manera natural en las Matemáticas, Física y otras ciencias. Un ejemplo de tal producto es el siguiente

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

La notación 5! (se lee "cinco factorial") se usa para representar el producto de los enteros positivos desde 1 a 5, esto es, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Definición 11.1.4. Para cualquier entero positivo n, la notación $n!$ está definido como

$$n! = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$$

El símbolo $0!$ esta definido como 1, esto es, $0! = 1$.

Ejemplo 11.1.5. Encuentre los primeros cinco términos de la secuencia

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}.$$

Solución: Note que

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(-1)^1}{(1-1)!} = \frac{-1}{0!} = -1, \\ a_2 &= \frac{(-1)^2}{1!} = 1, \\ a_3 &= \frac{(-1)^3}{2!} = -\frac{1}{2}, \\ a_4 &= \frac{(-1)^4}{3!} = \frac{1}{6} \\ a_5 &= \frac{(-1)^5}{4!} = -\frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, esta secuencia comienza de la siguiente manera

$$-1, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{24}, \cdots$$

Encontrando una fórmula para el n-ésimo término

Existen ocasiones en las cuales tenemos una lista de los primeros términos secuencia de una secuencia, pero no tenemos una fórmula para el n-ésimo término.

Ejemplo 11.1. Encuentre el n-esimo término para las siguientes secuencias.

- $6, 8, 10, 12, \cdots$.

  Solución: Bajo la suposición de que todos son multiplos de 2, una posible fórmula para el n-ésimo término de esta secuencia es

  $$a_n = 2n + 4.$$

- $3, 5, 7, 9, \cdots$.

  Solución: Bajo la suposición de que todos son enteros impares, una posible fórmula para el n-ésimo término de esta secuencia es

  $$a_n = 2n + 1.$$

- $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \cdots.$

  Solución: Primero note que el signo de los números alterna. El primer y tercer término son positivos, mientras el segundo y el cuarto término son negativos. Entonces, una posible forma de obtener positivo, negativo, positivo, negativo es con el término $(-1)^{n-1}$, pues esta secuencia empieza

  $$1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots$$

  Ahora note que los denominadores de los términos que aparecen son cuadrados perfectos. Suponiendo que este patrón continúa, entonces una posible fórmula para el n-ésimo término es

  $$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

- $-3, 9, -27, 81, \cdots$

  Solución: De forma similar a la secuencia anterior, en este caso una posible fórmula para el n-ésimo término es

  $$a_n = (-3)^n.$$