Programa Inmersión, Verano 2024
Notas escritas por Dr. M

Notas del cursos. Basadas en los prontuarios de MATE 3001 y MATE 3171

Clase #19: viernes, 19 de julio de 2024.

11 Secuencias, Series y Probabilidad

11.1 Continuación: Secuencias

Fórmulas recursivas

Hasta ahora, las fórmulas para el n-ésimo término de una secuencia han sido expresadas como una función en el parametro n (el número del término). Existe otra forma de expresar secuencias: formula recurrente. Una fórmula recurrente nos da el n-ésimo término como una función de términos anteriores.

Ejemplo 11.1.1. Encuentre los primeros cuatro términos de la secuencia infinita dada por

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_n &= (a_{n-1})^2 - 5, \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Solución: Nos dicen que $a_1 = 3$. Utilizando la definición recursiva, tenemos

$$\begin{aligned} \text{segundo término:} \quad & a_2 = (a_1)^2 - 5 = 3^2 - 5 = 4 \\ \text{tercer término:} \quad & a_3 = (a_2)^2 - 5 = 4^2 - 5 = 11 \\ \text{cuarto término:} \quad & a_4 = (a_3)^2 - 5 = 11^2 - 5 = 116. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los primeros cuatro términos de esta secuencia son $3, 4, 11, 116$.

Ejemplo 11.1.2. Encuentre los primeros cuatro términos de la secuencia infinita dada por

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_n &= 2a_{n-1} - 4, \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Solución: Nos dicen que $a_1 = 3$. Utilizando la definición recursiva, tenemos

$$\begin{aligned} \text{segundo término:} \quad & a_2 = 2a_1 - 4 = 2(3) - 4 = 2 \\ \text{tercer término:} \quad & a_3 = 2a_2 - 4 = 2(2) - 4 = 0 \\ \text{cuarto término:} \quad & a_4 = 2a_3 - 4 = 2(0) - 4 = -4. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los primeros cuatro términos de esta secuencia son $3, 2, 0, -4$.

Ejemplo 11.1.3. Encuentre los primeros siete términos de la secuencia infinita dada por

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \text{para } n \geq 3. \end{aligned}$$

Solución: Nos dicen que $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$. Utilizando la definición recursiva, obtenemos

$$\begin{aligned} \text{tercer término:} \quad & a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2 \\ \text{cuarto término:} \quad & a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3 \\ \text{quinto término:} \quad & a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5 \\ \text{sexto término:} \quad & a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8 \\ \text{séptimo término:} \quad & a_7 = a_6 + a_5 = 8 + 5 = 13. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los primeros siete términos de esta secuencia son $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$.

Esta última secuencia se conoce como la secuencia de Fibonacci. Les recomiendo que busquen información acerca de esta secuencia. Si nos sobra algo de tiempo en este curso, aprenderemos a conseguir de manera explícita el n-ésimo término de secuencias definidas recursivamente como la secuencia Fibonacci. En particular, demostraremos que si F_n es el n-ésimo término de la secuencia de Fibonacci, entonces

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Observe que (con algo de paciencia)

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \cdots$$

Secuencias Aritméticas

Una secuencia artimética puede definirse como una secuencia en la cual existe una diferencia común d entre términos consecutivos. Por ejemplo, la siguiente secuencia es artimética

$$3, 7, 11, 15, 19, 23, \cdots,$$

pues la diferencia de términos consecutivos es siempre 4, i.e

$$7 - 3 = \mathbf{4}, \ \ 11 - 7 = \mathbf{4}, \ \ 15 - 11 = \mathbf{4}, \ \ 19 - 15 = \mathbf{4}, \ \ 23 - 19 = \mathbf{4}, \cdots$$

Consideremos la secuencia artimética anterior y tratemos de obtener una fórmula explícita para el n-ésimo término. El primer término es claramente 3. Ahora, el segundo término es

$$a_2 = 7 = 3 + 4.$$

El tercer término es

$$a_3 = 11 = 3 + 8 = 3 + 2(4).$$

El cuarto término es

$$a_4 = 15 = 3 + 12 = 3 + 3(4).$$

El quinto término es

$$a_5 = 19 = 3 + 16 = 3 + 4(4).$$

El patrón ya es claro, el n-ésimo término va a estar dado por

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot 4.$$

Más aún, note que si restamos términos consecutivos, obtenemos

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= 3 + (n-1)4 - (3 + (n-2)4) \\ &= 3 + 4n - 4 - (3 + 4n - 8) \\ &= 3 + 4n - 4 - 3 - 4n + 8 \\ &= 4. \end{aligned}$$

O sea, la resta de términos consecutivos es constante (en este caso es 4), como se requiere. Este argumento nos lleva a la siguiente definición.

Definición 11.1.4. Una secuencia que tiene n-ésimo término de la forma

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

donde a_1 y d son reales, se llama secuencia aritmética.

Ejemplo 11.1.5. Encuentre los primeros cuatro términos y el término 50 de las siguientes secuencias aritméticas.

1. $a_n = -7 + (n-1) \cdot 6$

   Solución: Los primeros cuatro términos son

   $$\begin{aligned} a_1 &= -7 + (1-1) \cdot 6 = -7 \\ a_2 &= -7 + (2-1) \cdot 6 = -1 \\ a_3 &= -7 + (3-1) \cdot 6 = 5 \\ a_4 &= -7 + (4-1) \cdot 6 = 11, \end{aligned}$$

   mientras el término 50 es

   $$a_{50} = -7 + (50-1) \cdot 5 = 287.$$

2. $a_n = -\frac{1}{2}n + 8$

   Solución: Los primeros cuatro términos son

   $$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2} \cdot 1 + 8 = \frac{15}{2} \\ a_2 &= -\frac{1}{2} \cdot 2 + 8 = 7 \\ a_3 &= -\frac{1}{2} \cdot 3 + 8 = \frac{13}{2} \\ a_4 &= -\frac{1}{2} \cdot 4 + 8 = 6, \end{aligned}$$

mientras el término 50 es

$$a_{50} = -\frac{1}{2} \cdot 50 + 8 = -17.$$

Ejemplo 11.1.6. Determine si cada una de las siguientes secuencias es artimética. De serlo, escriba la fórmula para el término general de la secuencia.

1. $3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, \cdots$

   Solución: Note que la diferencia común entre términos consecutivos es $d = 5$, por lo tanto, la secuencia es aritmética. Como $a_1 = 3$, entonces la fórmula general para el n-ésimo término es

   $$a_n = 3 + (n-1) \cdot 5.$$

   Esta fórmula puede escribirse como

   $$a_n = 5n - 2.$$

2. $5, 2, -1, -4, \cdots$

   Solución: Note que la diferencia común entre términos consecutivos es $d = -3$, por lo tanto, la secuencia es aritmética. Como $a_1 = 5$, entonces la fórmula general para el n-ésimo término es

   $$a_n = 5 + (n-1) \cdot (-3).$$

   Esta fórmula puede escribirse como

   $$a_n = 8 - 3n.$$

3. $2, 6, 18, 54, \cdots$

   Solución: Note que la diferencia común entre términos consecutivos no es constante, pues $6 - 2 = 4$, mientras $18 - 6 = 12$. Concluimos que esta secuencia no es aritmética.

4. $5, 11, 17, 23, \cdots$

   Solución: Note que la diferencia común entre términos consecutivos es $d = 6$, por lo tanto, la secuencia es aritmética. Como $a_1 = 5$, entonces la fórmula general para el n-ésimo término es

   $$a_n = 5 + (n-1) \cdot 6.$$

   Esta fórmula puede escribirse como

   $$a_n = 6n - 1.$$

Ejemplo 11.1.7. Una representante de seguros hizo \$30,000 su primer año de trabajo y \$60,000 durante su onceavo año de trabajo. Suponiendo que su salario anual aumenta de forma artimética, prediga el salario que ella tendrá en su año de trabajo número 20.

Solución: Nos dicen que el salario satisface una secuencia aritmética, por lo tanto, sabemos que su salario anual está dado por

$$a_n = 30000 + (n-1)d,$$

para algún real d. Ahora bien, también nos dicen que su salario en el año número 11 es \$60,000, por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} 60000 &= 30000 + (11-1)d \\ 30000 &= 10d \\ 3000 &= d \end{aligned}$$

Entonces, su salario en el n-ésimo año de trabajo es

$$a_n = 30000 + (n-1) \cdot 3000$$

Concluimos que su salario en el año de trabajo número 20 será

$$a_{20} = \$30,000 + 19 \cdot \$3000 = \$87,000.$$

11.2 Series

Series y la notación de sumatoria

Una suma de términos de una secuencia, antes de que se sumen los términos, es una sumatoria indicada. Una sumotaria indicada es un ejemplo de una serie.

Definición 11.2.1. Una serie es una suma indicada de los términos de una secuencia finita o infinita.

Cuando trabajemos con sumatorias, utilizaremos la notación Σ (letra griega sigma). Por ejemplo, la suma de los primeros 10 enteros es

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = \sum_{n=1}^{10} n.$$

Otro ejemplo es la suma de los cuadrados de los primeros cinco naturales, la cual se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^{5} i^2$$

Para evaluar esta suma, dejamos que i tome los valores enteros desde 1 a 5 en la expresión i^2, o sea,

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55.$$

La letra i en la notación de sumatoria se llama el índice de la sumatoria. Casi siempre utilizamos las letras i, n o k, pero cualquier letra puede ser utilizada. Más aún, el índice de una sumatoria se conoce en matemáticas como un ejemplo de una "variable boba", pues las expresiones

$$\sum_{i=1}^{5} i^2, \quad \sum_{n=1}^{5} n^2, \quad \sum_{k=1}^{5} k^2$$

tienen todas el mismo valor, independiente de la letra escogida para representar el índice.

Ejemplo 11.2.2. Encuentre el valor de cada una de las siguientes sumatorias.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{6}(-1)^i 2^{i-1}$.

   Solución: Note que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{6}(-1)^i 2^{i-1} &= (-1)^1 2^{1-1} + (-1)^2 2^{2-1} + (-1)^3 2^{3-1} + \\ &\quad (-1)^4 2^{4-1} + (-1)^5 2^{5-1} + (-1)^6 2^{6-1} \\ &= -1 + 2 - 4 + 8 - 16 + 32 \\ &= 21.\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\sum_{n=3}^{7}(2n-1)$.

   Solución: Note que

$$\sum_{n=3}^{7}(2n-1) = 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 45.$$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 4$.

   Solución: Note que

$$\sum_{k=1}^{5} 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20.$$

4. $\displaystyle\sum_{j=1}^{5}(-1)^{j-1}(2j)$.

   Solución: Note que

$$\sum_{j=1}^{5}(-1)^{j-1}(2j) = 2 - 4 + 6 - 8 + 10 = 6.$$

De la misma manera que una secuencia puede ser finita o infinita, una serie puede tener una cantidad finita o infinita de términos. Cuando tenemos una cantidad inifnita de términos, entonces utilizamos el símbolo de infinito (∞) para indicar que no existe final para los términos de una serie. Por ejemplo,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Ejemplo 11.2.3. Escriba cada una de las siguientes sumas en notación de serie.

1. $2 + 4 + 6 + 8 + 10$.

   Solución: Esta serie consiste de números pares. El n-ésimo término está dado por $a_n = 2n$. Por lo tanto, esta serie se puede escribir como

   $$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = \sum_{i=1}^{5} (2i).$$

2. $\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}$.

   Solución: Esta serie es un poco más complicada que la anterior, pues existen dos características de interés. La primera es que los denominadores son impares y la segunda es que los signos alternan. Un impar puede escribirse de la forma $2n+1$, mientras que $(-1)^n$ puede utilizarse para la alternancia en signos. Note que

   $$\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} = \sum_{n=2}^{6} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

3. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$.

   Solución: Note que los denominadores son los cuadrados de los enteros positivos. Por lo tanto,

   $$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Cambiando el índice de la sumatoria

Considere la segunda sumatoria en el Ejemplo 11.2.3. Observe que esta sumatoria empieza cuando n es 2 y continúa hasta cuando n es 6. Ahora, el punto donde empiece esta sumatoria es irrelevante, pues tanto

$$\sum_{n=3}^{7} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$

como

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+3}$$

representan la misma sumatoria.

Ejemplo 11.2.4. Escriba las siguientes series de tal forma que el índice empiece con valor 1.

1. $\displaystyle\sum_{j=3}^{8} \frac{(-1)^j}{4j+1}$.

   Solución: Note que j va desde 3 a 8, mientras $i = j - 2$ va desde 1 a 6. Note que i empieza con valor 1, como queremos. Ahora escriba j en términos de i, i.e. $j = i + 2$, para obtener,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=3}^{8} \frac{(-1)^j}{4j+1} &= \sum_{i=1}^{6} \frac{(-1)^{i+2}}{4(i+2)+1} \\
&= \sum_{i=1}^{6} \frac{(-1)^i(-1)^2}{4i+8+1} \\
&= \sum_{i=1}^{6} \frac{(-1)^i}{4i+9}.
\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{2i}$.

   Solución: Note que i va desde 5 a ∞, mientras $n = i - 4$ va desde 1 a ∞. Note que n empieza con valor 1, como queremos. Ahora escriba i en términos de n, i.e. $i = n + 4$, para obtener,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{2i} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+4)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+8}.
\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\sum_{j=2}^{7} (-1)^{j-1} j^3$.

   Solución: Note que j va desde 2 a 7, mientras $k = j - 1$ va desde 1 a 6. Note que k empieza con valor 1, como queremos. Ahora escriba j en términos de k, i.e. $j = k + 1$, para obtener,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{7} (-1)^{j-1} j^3 &= \sum_{k=1}^{6} (-1)^{(k+1)-1} (k+1)^3 \\
&= \sum_{k=1}^{6} (-1)^k (k+1)^3
\end{aligned}$$

El Promedio Aritmético

Si tomamos una secuencia de tres exámenes, entonces tu "promedio" es la suma de la puntuación de cada uno de los tres exámenes divida por 3. Lo que conocemos como el "promedio" es lo que en matemáticas llamamos el promedio artimético.

Definición 11.2.5. El promedio artimético de los números $x_1, x_2, \cdots, x_n$ es el número $\bar{x}$ dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Ejemplo 11.2.6. Encuentre el promedio aritmético de las siguientes secuencias.

1. 90,93,97,88.

   Solución: Note que

   $$\frac{1}{4}(90 + 93 + 97 + 88) = \frac{368}{4} = 92.$$

   Por lo tanto, el promedio artimético es 92.

2. $-12, 3, 0, 5, -2, 9$.

   Solución: Note que

   $$\frac{-12 + 3 + 0 + 5 + (-2) + 9}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

   Por lo tanto, el promedio artimético es $1/2$.

3. $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$.

   Solución: Note que

   $$\frac{2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16}{8} = \frac{72}{8} = 9.$$

   Por lo tanto, el promedio artimético es 9.

Serie Artimética

Como sugiere el nombre, la suma indicada de una secuencia artimética se conoce como una serie aritmética. El valor de una serie aritmética finita puede obtenerse sin tener que efectuar las sumas. El método que vamos a utilizar proviene del gran matemático Johann Carl Friedrich Gauss.

Gauss fue un excelente matemático y niño prodigio. Existe una historia que dice que cuando tenía apenas 8 años, su maestro lo mandó a sumar los números del 1 al 100. La idea era que esta suma tomara algo de tiempo para que el maestro descansara un poco. Para sorpresa del maestro, Gauss contestó el problema bastante rápido. A continuación la técnica que utilizó Gauss (la cual es la que vamos a utilizar para obtener el valor de sumatorias aritméticas).

Sea S el valor de la suma de los primeros cien enteros positivos, esto es,

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100.$$

Gauss, en aquel entonces, decide efectúar esta suma dos veces, pero, en vez de sumar horizontal, efectúa la suma de forma vertical, i.e.

$$\begin{array}{ccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\ S & = & 100 & + & 99 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

Por lo tanto,

$$2S = \underbrace{101 + 101 + 101 + \cdots + 101}_{\text{100-veces}}.$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} 2S &= 100(101) \\ S &= \frac{100(101)}{2} = 5050. \end{aligned}$$

(Y pensar que tenía apenas 8 años $\cdots$).

La forma en la cual Gauss resolvío este problema se puede utilizar para obtener el valor de cualquier serie aritmética. Sea

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

una serie artimética. Suponga que d es la diferencia común de términos consecutivos en la secuencia $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$. Entonces,

$$\begin{array}{ccccccccccc} S_n & = & a_1 & + & (a_1 + d) & + & (a_1 + 2d) & + & \cdots & + & a_n \\ S_n & = & a_n & + & (a_n - d) & + & (a_n - 2d) & + & \cdots & + & a_1 \\ \hline 2S_n & = & (a_1 + a_n) & + & (a_1 + a_n) & + & (a_1 + a_n) & + & \cdots & + & (a_1 + a_n) \end{array}$$

O sea,

$$S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)}_{n\text{-veces}}.$$

Concluimos queremos que

$$\begin{aligned} 2S_n &= n(a_1 + a_n) \\ S_n &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \end{aligned}$$

Teorema 11.2.7. La suma S_n de los primeros n términos de una serie aritmética cuyo primer término es a_1 y cuyo n-ésimo término es a_n es

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

En este caso, el promedio aritmético está dado por

$$\bar{a} \quad = \quad \frac{S_n}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Ejemplo 11.2.8. Encuentre el valor de cada una de las siguientes series aritméticas.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{15}(3i-5)$.

   Solución: Note que el primer término está dado por $a_1 = -2$, mientras el término número quince está dado por

   $$a_{15} = 3 \times 15 - 5 = 45 - 5 = 40.$$

   Por lo tanto,

   $$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{15}(3i-5) &= \frac{15}{2}(a_1 + a_{15}) \\ &= \frac{15}{2}(-2+40) \\ &= \frac{15}{2}(38) \\ &= 15 \times 19 = 285. \end{aligned}$$

2. $36 + 41 + 46 + 51 + \cdots + 91$.

   Solución: Note que la diferencia común entre términos consecutivos es $d = 5$. Por lo tanto, el n-ésimo término de la secuencia aritmética (no la serie) está dado por

   $$a_n = 36 + (n-1) \cdot 5.$$

   Ahora, si escribimos la suma original en notación de serie, ¿hasta dónde llega el índice? Bueno, para contestar esta pregunta debemos conseguir n tal que $a_n = 91$. Por lo tanto,

   $$\begin{aligned} 91 &= 36 + (n-1) \cdot 5 \\ 55 &= (n-1) \cdot 5 \\ 55 &= 5n - 5 \\ 60 &= 5n \\ 12 &= n. \end{aligned}$$

   Esto implica que la sumatoria termina en 12, o sea, tenemos que calcular

   $$\sum_{n=1}^{12} 36 + (n-1) \cdot 5 = \frac{12}{2}(36 + 91) = 762.$$

Ejemplo 11.2.9. Un empleado le pagan \$20,000 el primer año y recibe \$1,200 de aumento cada año por los próximos 39 años. Encuentre el total de salario que el empleado gana durante este tiempo y el promedio artimético de los 40 salarios anuales.

Solución: Observe que los salarios forman una secuencia aritmética cuyo n-ésimo término es

$$a_n = 20,000 + (n-1)1200.$$

La suma de los primeros 40 términos de esta secuencia es

$$S_{40} = \frac{40}{2}(20,000 + 66,800) = 1,736,000.$$

O sea, el salario total por los 40 años de servicio es \$1,736,000. Ahora, si divide este número por 40, obtenemos el promedio aritmético, el cual es un salario de \$43,400.