Programa Inmersión, Verano 2024
Notas escritas por Dr. M

Notas del cursos. Basadas en los prontuarios de MATE 3001 y MATE 3171

Clase #2: martes, 25 de junio de 2024.

2 Números racionales positivos

2.1 Consceptos básicos del conjunto de los números racionales positivos

Definición 2.1.1. El conjunto de los números racionales positivos, denotado por $\mathbb{Q}^+$, esta definido como

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N} \right\}.$$

En la fracción a/b, el número a se llama numerador, mientras el número b se llama denominador.

Ejemplo 2.1.2. Los siguientes números son racionales positivos

$$\frac{1}{2}. \frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{2}{9}, \frac{9}{11}, \frac{3}{2}, 4, \frac{10}{81}, \ldots$$

Note que los números racionales positivos son otra manera de escribir los cocientes de números naturales. Por ejemplo, $2/5 = 2 \div 5$. Decimos que una fracción a/b es propia si $a < b$ e impropia si $a \geq b$.

Ejemplo 2.1.3. Las siguientes fracciones son propias:

$$\frac{1}{2}. \frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{2}{9},$$

mientras las siguientes son impropias:

$$\frac{3}{2}, 4, \frac{7}{3}, \frac{1999}{111}.$$

Cuando trabajamos con fracciones, es, en muchas ocasiones, importante que las fracciones tengan el mismo denominador. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 2.1.4. Dos fracciones son homogéneas cuando tienen el mismo denominador.

Ejemplo 2.1.5. Decida cual de los siguientes pares de fracciones son homogéneas:

1. $\frac{3}{7}$ y $\frac{5}{7}$ (son homogéneas)

2. $\dfrac{2}{13}$ y $\dfrac{14}{13}$ (son homogéneas)

3. $\dfrac{3}{7}$ y $\dfrac{5}{2}$ (no son homogéneas)

4. $\dfrac{2}{13}$ y $\dfrac{3}{7}$ (no son homogéneas)

En muchas ocasiones, tenemos que identificar cuando dos números racionales positivos (fracciones) son iguales.

Definición 2.1.6. Decimos que la fracción $\dfrac{a}{b}$ es igual a la fracción $\dfrac{c}{d}$ si y solo si

$$ad = bc.$$

Ejemplo 2.1.7. Note que $\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{6}$, pues $1 \cdot 6 = 3 \cdot 2$.

Ejemplo 2.1.8. Determine si $\dfrac{3}{5}$ es igual a $\dfrac{70}{125}$.

Respuesta: Note que $3 \cdot 125 = 375$, mientras que $70 \cdot 5 = 350$. Concluimos que

$$\frac{3}{5} \neq \frac{70}{125}.$$

Ejemplo 2.1.9. Encuentre una fracción equivalente a $21/49$ con denominador 35.

Solución: Note que

$$\frac{21}{49} = \frac{3 \cdot 7}{7 \cdot 7} = \frac{3}{7}.$$

Ahora multiplique el numerador y denominador por 5 para obtener

$$\frac{21}{49} = \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{15}{35}.$$

La fracción $15/35$ tiene denominador 35 y es equivalente a $21/49$.

¿Cuándo obtenemos fracciones equivalentes a una fracción dada?

Note que

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{5}{15} = \frac{7}{21}$$

y también

$$\frac{5}{7} = \frac{10}{14} = \frac{30}{42} = \frac{55}{77}$$

¿Ve algun patrón?

Bueno, observe que

$$\frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6},$$

también
$$\frac{1}{3} = \frac{5 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{5}{15},$$
y así sucesivamente. De igual forma,
$$\frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 7} = \frac{10}{14},$$
también
$$\frac{5}{7} = \frac{6 \cdot 5}{6 \cdot 7} = \frac{30}{42},$$
y así sucesivamente. En general, podemos ver que
$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b}$$
para todo $k \neq 0$.

Simplificación de fracciones

Decimos que una fracción a/b está en su forma más simple (o reducida) si y solo si $\mathrm{DCM}(a, b) = 1$.

Definición 2.1.10. Decimos que dos naturales a y b son relativamente primos (o co-primos) si y solo si $\mathrm{DCM}(a, b) = 1$.

En otras palabras, decimos que una fracción está a/b está reducida si y solo si a y b son relativamente primos.

Ejemplo 2.1.11. Note que la fracción $2/5$ está en su forma más simple, pues 2 y 5 son relativamente primos. Considere la fracción $33/49$. Note que
$$33 = 3 \cdot 11 \quad \text{y} \quad 49 = 7^2,$$
por lo tanto,
$$\mathrm{DCM}(33, 49) = 3^{\min(1,0)} \cdot 7^{\min(0,2)} \cdot 11^{\min(1,0)} = 3^0 7^0 11^0 = 1.$$
Concluimos que $33/49$ está en su forma más reducida. Finalmente, considere la fracción $33/111$. Note que
$$33 = 3 \cdot 11 \quad \text{y} \quad 111 = 3 \cdot 37.$$
O sea, $\mathrm{DCM}(33, 111) = 3$. Concluimos que $33/111$ no está reducida.

Para escribir una fracción a/b en su forma más simple, dividimos el numerador y el denominador por el divisor común mayor de ambos ($\mathrm{DCM}(a, b)$)

Ejemplo 2.1.12. Escriba 33/111 en su forma más simple.

Respuesta: Note que $\mathrm{DCM}(33, 111) = 3$ (mire el Ejemplo 2.1.11). Entonces, dividiendo el numerador y el denominador por $\mathrm{DCM}(33, 111) = 3$, obtenemos que

$$\frac{33}{111} = \frac{33/3}{111/3} = \frac{11}{37}.$$

11/37 es la forma reducida de 33/111.

Otra forma de simplificar fracciones es utilizando factorizaciones primas:

Ejemplo 2.1.13. Escriba 720/4704 en su forma más simple.

Respuesta: Note que

$$\frac{720}{4704} = \frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^5 \cdot 3 \cdot 7^2} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 7^2} = \frac{15}{98}.$$

Orden de fracciones positivas

Dadas dos fracciones a/b y c/d, una de las siguientes relaciones es cierta

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \qquad \frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \quad \text{o} \quad \frac{a}{b} > \frac{c}{d}.$$

Esto nos permite ordenar las fracciones de menor a mayor (o de mayor a menor, según sea el caso).

Ejemplo 2.1.14. Observe que

$$\frac{2}{3} < \frac{5}{6}, \quad \frac{2}{3} > \frac{1}{2}, \quad \frac{11}{12} < \frac{23}{24}.$$

Si dos fracciones son homogéneas, entonces será menor aquella que tenga menor numerador. En arroz y habichuelas, $a/b < c/b$ si y solo si $a < c$.

Ejemplo 2.1.15. Determine si 3/5 es menor que 2/3.

Solución: Encuentre fracciones homogéneas equivalentes a las fracciones dadas.

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{15} \quad \frac{2}{3} = \frac{10}{15}.$$

Como $9 < 10$, entonces concluimos que $3/5 < 2/3$.

Ejemplo 2.1.16. Escriba en orden ascendente (de menor a mayor) las siguientes fracciones.

$$\frac{4}{5}, \quad \frac{6}{7}, \quad \frac{7}{10}, \quad \frac{7}{15}.$$

Solución: Primero encontramos mínimo común multiplo de los denominadores, i.e. $\mathrm{MCM}(7, 5, 10, 15)$. Para esto, note que

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ 7 &= 7 \\ 10 &= 2 \cdot 5 \\ 15 &= 3 \cdot 5, \end{aligned}$$

por lo tanto, $\mathrm{MCM}(5, 7, 10, 15) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{4}{5} &= \frac{(2 \cdot 3 \cdot 7)4}{(2 \cdot 3 \cdot 7)5} = \frac{168}{210} \\ \frac{6}{7} &= \frac{(2 \cdot 3 \cdot 5)6}{(2 \cdot 3 \cdot 5)7} = \frac{180}{210} \\ \frac{7}{10} &= \frac{(3 \cdot 7)7}{(3 \cdot 7)10} = \frac{147}{210} \\ \frac{7}{15} &= \frac{(2 \cdot 7)7}{(2 \cdot 7)15} = \frac{98}{210} \end{aligned}$$

Ahora es claro que el orden es

$$\frac{98}{210}, \quad \frac{147}{210}, \quad \frac{168}{210}, \quad \frac{180}{210},$$

o sea,

$$\frac{7}{15}, \quad \frac{7}{10}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{6}{7}.$$

Es un hecho matemático que entre dos fracciones positivas a/b y c/d tales que $a/b < c/d$, siempre podemos encontrar otra fracción e/f tal que

$$\frac{a}{b} < \frac{e}{f} < \frac{c}{d}.$$

En realidad existe una cantidad infinite de fracciones entre a/b y c/d, pero una de ellas es bien fácil de conseguir y está dada por la fórmula

$$\frac{e}{f} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Ejemplo 2.1.17. Encuentre una fracción entre $2/5$ y $6/11$.

Respuesta: Considere la fracción

$$\frac{2+6}{5+11} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

Note que

$$\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{6}{11}.$$

Ejemplo 2.1.18. Encuentre una fracción entre 2/5 y 1/2.

Respuesta: Considere la fracción

$$\frac{2+1}{5+2} = \frac{3}{7}.$$

Note que

$$\frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2}.$$

Note que si seguimos con este proceso, entonces podemos encontrar una cantidad infinitas de fracciones entre 2/5 y 6/11. Por ejemplo, ya tenemos que

$$\frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2} < \frac{6}{11}.$$

Aplique el mismo proceso para encontrar una fracción entre 2/5 y 3/7, i.e.

$$\frac{2+3}{5+7} = \frac{5}{12}.$$

Entonces, tenemos que

$$\frac{2}{5} < \frac{5}{12} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2} < \frac{6}{11}.$$

Continúe de esta forma para obtener

$$\frac{2}{5} < \cdots < \frac{5}{12} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2} < \frac{6}{11}.$$

2.2 Operaciones en el conjunto de los números racionales positivos

Suma de números racionales positivos

Dadas dos fracciones homogéneas a/b y c/b, la suma de ellas está dada por

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}.$$

Ejemplo 2.2.1. Note que

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \frac{5}{3} &= \frac{7}{3} \\ \frac{5}{13} + \frac{7}{13} &= \frac{12}{13} \\ \frac{6}{17} + \frac{14}{17} &= \frac{20}{17}. \end{aligned}$$

Para sumar dos fracciones no homogéneas, podemos encontrar fracciones homogéneas equivalentes a las fracciones a considerar y luego sumar utilizando la regla anterior.

Ejemplo 2.2.2. Note que

$$\begin{aligned}\frac{5}{6}+\frac{3}{10} &= \frac{25}{30}+\frac{9}{30}\\ &= \frac{25+9}{30}\\ &= \frac{34}{30}=\frac{17}{15}.\end{aligned}$$

También podemos utilizar la siguiente fórmula

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Ejemplo 2.2.3. Note que

$$\begin{aligned}\frac{5}{6}+\frac{3}{10} &= \frac{5\cdot 10+3\cdot 6}{6\cdot 10}\\ &= \frac{50+18}{60}\\ &= \frac{68}{60}=\frac{4\cdot 17}{4\cdot 15}\\ &= \frac{17}{15}.\end{aligned}$$

Las fracciones impropias también pueden escribirse como un número mixto. Un número mixto es la suma de un número entero y una fracción propia.

Ejemplo 2.2.4. Escriba 24/11 como un número mixto.

Respuesta: Note que

$$\begin{aligned}\frac{24}{11} &= \frac{22+2}{11}\\ &= \frac{22}{11}+\frac{2}{11}\\ &= 2+\frac{2}{11}\\ &= 2\frac{2}{11}\end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.5. Escriba 55/13 como un número mixto.

Respuesta: Note que

$$\begin{aligned}\frac{55}{13} &= \frac{4(13)+3}{13}\\ &= \frac{4(13)}{13}+\frac{3}{13}\\ &= 4+\frac{3}{13}\\ &= 4\frac{3}{13}\end{aligned}$$

Resta de números racionales positivos

Dadas dos fracciones homogéneas a/b y c/b tales que $a/b > c/d$, entonces la resta de ellas está dada por

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$

Ejemplo 2.2.6. Note que

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} - \frac{2}{3} &= \frac{3}{3} = 1 \\ \frac{7}{13} - \frac{5}{13} &= \frac{2}{13} \\ \frac{14}{17} - \frac{6}{17} &= \frac{8}{17}. \end{aligned}$$

Para restar dos fracciones no homogéneas, podemos encontrar fracciones homogéneas equivalentes a las fracciones a considerar y luego restar utilizando la regla anterior.

Ejemplo 2.2.7. Note que

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} - \frac{3}{10} &= \frac{25}{30} - \frac{9}{30} \\ &= \frac{25-9}{30} \\ &= \frac{16}{30} = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

También podemos utilizar la siguiente fórmula

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}.$$

Ejemplo 2.2.8. Note que

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} - \frac{3}{10} &= \frac{5 \cdot 10 - 3 \cdot 6}{6 \cdot 10} \\ &= \frac{50-18}{60} \\ &= \frac{32}{60} = \frac{4 \cdot 8}{4 \cdot 15} \\ &= \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

2.3 Multiplicación y división

Dados a/b y c/d, definimos la multiplicación de fracciones como

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Ejemplo 2.3.1. Utilizando esta definición, obtenemos

1. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{11} = \frac{10}{33}$

2. $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$

3. $\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{3} = \frac{35}{36}$

4. $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{12} = 1$

Si en un problema aparece el producto de una fracción por la suma de dos fracciones, la operación se puede efectuar de dos maneras distintas:

- Usando distribución:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) &= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \\ &= \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf} \\ &= \frac{acf}{bdf} + \frac{ade}{bdf} \\ &= \frac{acf + ade}{bdf}. \end{aligned}$$

- Efectuando primero la operación de suma dentro del paréntesis y luego se utiliza la definición de multiplicación:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) &= \frac{a}{b}\left(\frac{cf}{df} + \frac{ed}{df}\right) \\ &= \frac{a}{b}\left(\frac{cf + ed}{df}\right) \\ &= \frac{a(cf + ed)}{b(df)} \\ &= \frac{acf + ade}{bdf}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.2. Utilizando distribución:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\right) &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{5}{8} \\ &= \frac{2}{8} + \frac{5}{8} \\ &= \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Efectuando primero la operación de suma dentro del paréntesis:

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\right) &= \frac{3}{4}\left(\frac{2}{6}+\frac{5}{6}\right) \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{7}{6}\right) \\
&= \frac{7}{8}.
\end{aligned}
$$

Antes de definir la división de fracciones, definimos el recíproco de un número diferente de 0.

Definición 2.3.3. El recíproco de $a \neq 0$ es el número c tal que $a \cdot c = 1$.

Ejemplo 2.3.4. Note que el recíproco de 2 es $1/2$, pues $2(1/2) = 1$. De igual forma, el recíproco de $7/8$ es $8/7$, pues $(7/8)(8/7) = 1$.

División números racionales positivos

Dadas dos fracciones a/b y c/d, definimos la división de fracciones como

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}.$$

Ahora, note que

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} &= \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \\
&= \frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}{\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c}} \\
&= \frac{\frac{ad}{bc}}{1} \\
&= \frac{ad}{bc}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.3.5. Note que

1. $\dfrac{2}{3} \div \dfrac{5}{7} = \dfrac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \dfrac{14}{15}$

2. $\dfrac{4}{5} \div \dfrac{11}{12} = \dfrac{4 \cdot 12}{5 \cdot 11} = \dfrac{48}{55}$

Ejemplo 2.3.6. Suponga que ahora nos preguntan por

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right) \div \left(\frac{5}{6}-\frac{5}{7}\right).$$

En este caso, note que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)\div\left(\frac{5}{6}-\frac{5}{7}\right) &= \left(\frac{3+8}{12}\right)\div\left(\frac{5(7)-5(6)}{42}\right)\\
&= \left(\frac{11}{12}\right)\div\left(\frac{5}{42}\right)\\
&= \frac{11\cdot 42}{5\cdot 12}\\
&= \frac{462}{60}=\frac{6(77)}{6(10)}\\
&= \frac{77}{10}.
\end{aligned}$$