Programa Inmersión, Verano 2024
Notas escritas por Dr. M

Notas del cursos. Basadas en los prontuarios de MATE 3001 y MATE 3023

Clase #20: lunes, 22 de julio de 2024.

11 Secuencias, Series y Probabilidad

11.3 Secuencias Geométricas y Series

Una secuencia aritmética tiene una diferencia constante entre términos consecutivos. Esta relación simple nos permite conseguir un fórmula para el n-ésimo término de una secuancia aritmética. En este sección estudiaremos otro tipo de secuencia en la cual existe una relación simple entre términos consecutivos.

Series Geométricas

Una secuencia geométrica está definida como una secuencia en la cual existe una razón constante entre términos consecutivos. Por ejemplo, considere la secuencia

$$5, 10, 20, 40, 80, \cdots$$

Observe que la razón constante entre términos consecutivos es 2, pues

$$\frac{10}{5} = \mathbf{2}, \quad \frac{20}{10} = \mathbf{2}, \quad \frac{40}{20} = \mathbf{2}, \quad \frac{80}{40} = \mathbf{2}, \cdots .$$

Tratemos de conseguir una fórmula para el n-ésimo término de la secuencia. Note que

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \\ a_2 &= 10 = 5 \cdot 2 \\ a_3 &= 20 = 10 \cdot 2 = 5 \cdot 2^2 \\ a_4 &= 40 = 20 \cdot 2 = 5 \cdot 2^3. \end{aligned}$$

El patrón ahora es claro, el n-ésimo término de la secuencia está dado por

$$a_n = 5 \cdot 2^{n-1}.$$

Este ejemplo nos lleva a la siguiente definición.

Definición 11.3.1. Una secuencia con término general $a_n = ar^{n-1}$ se llama secuencia geométrica con razón constante r, donde $r \neq 0, 1$.

Ejemplo 11.3.2. Encuentre los primeros cuatro términos de las siguientes secuencias.

1. $a_n = 3^n$.

   Solución: Note que

   $$a_1 = 3, \;\; a_2 = 9, \;\; a_3 = 27, \;\; a_4 = 81.$$

2. $a_n = 100\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

   Solución: Note que

   $$\begin{aligned} a_1 &= 100\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} = 100 \\ a_2 &= 100\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = 50 \\ a_3 &= 100\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = 25 \\ a_4 &= 100\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} = 12.5. \end{aligned}$$

3. $a_n = 3 \cdot 2^n$.

   Solución: Note que

   $$\begin{aligned} a_1 &= 3 \cdot 2^1 = 6 \\ a_2 &= 3 \cdot 2^2 = 12 \\ a_3 &= 3 \cdot 2^3 = 24 \\ a_4 &= 3 \cdot 2^4 = 48. \end{aligned}$$

Ejemplo 11.3.3. Encuentre una fórmula para el n-ésimo término de cada una de las siguientes secuencias geométricas.

1. $0.3, \;\; 0.03, \;\; 0.003, \;\; 0.0003, \cdots$

   Solución: Note que la razón constante está dada por

   $$r = \frac{0.03}{0.3} = \frac{0.003}{0.03} = \frac{0.0003}{0.003} = \cdots = \mathbf{0.1}.$$

   El primer término es $a = 0.3$. Por lo tanto, el n-ésimo término de la secuencia está dado por

   $$a_n = ar^{n-1} = 0.3(0.1)^{n-1}.$$

2. $2, \;\; -6, \;\; 18, \;\; -54, \cdots$

Solución: Note que la razón constante está dada por

$$r = \frac{-6}{2} = \frac{18}{-6} = \frac{-54}{18} = \cdots = \mathbf{-3}.$$

Ahora, el primer término es $a = 2$, por lo tanto, el n-ésimo término de la secuencia está dado por

$$a_n = ar^{n-1} = 2(-3)^{n-1}.$$

3. $12,\ \ 6,\ \ 3,\ \ \frac{3}{2}, \cdots$

   Solución: Note que la razón constante está dada por

   $$r = \frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{3/2}{3} = \cdots = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.$$

   Ahora, el primer término es $a = 12$, por lo tanto, el n-ésimo término de la secuencia está dado por

   $$a_n = ar^{n-1} = 12\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Ejemplo 11.3.4. Encuentre los primeros cuatro términos de cada secuencia. Determine si la secuencia es geométrica o no.

1. $a_n = (-2)^{3n}$.

   Solución: Los primeros cuatro términos de esta secuencia están dados por

   $$-8,\ \ 64,\ \ -512,\ \ 4096.$$

   Note que la razón de términos consecutivos está dada por

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-2)^{3(n+1)}}{(-2)^{3n}} = \frac{-8(-2)^{3n}}{(-2)^{3n}} = -8.$$

   Por lo tanto, la secuencia es geométrica.

2. $a_1 = 1.25$, $a_n = -2a_{n-1}$ para $n \geq 2$.

   Solución: Los primeros cuatro términos de esta secuencia están dados por

   $$\begin{aligned} a_1 &= 1.25 \\ a_2 &= -2a_1 = -2(1.25) = -2.50 \\ a_3 &= -2a_2 = -2(-2.50) = 5 \\ a_4 &= -2a_3 = -2(5) = -10. \end{aligned}$$

   Ahora, la recursión nos permite calcular la razón de términos consecutivos, pues $a_n = -2a_{n-1}$, implica que

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-2a_n}{a_n} = -2.$$

   Por lo tanto, concluimos que esta secuencia es geométrica.

3. $a_n = 3n$.

Solución: Los primeros cuatro términos de esta secuencia están dados por

$$3, \;\; 6, \;\; 9, \;\; 12.$$

Observe que

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2, \text{ pero } \frac{a_3}{a_2} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto, la secuencia NO es geométrica.

Ejemplo 11.3.5. Una pelota siempre rebota 2/3 de la distancia desde la cual cae. Si la pelota se lanza desde una altura de 9 pies y luego se observa rebotar 64/81 pies, entonces ¿cuántas veces rebotó?

Solución: Obseve que después del primer rebote la pelota rebota a

$$9\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \text{ pies.}$$

Después del segundo rebote, la pelota rebota a

$$9\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 6\left(\frac{2}{3}\right) = 4 \text{ pies.}$$

Es claro que el primer término de la secuencia es 6 y que la razón común es 2/3, por lo tanto, el término general está dado por

$$a_n = 6\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Ahora, para resolver el número de rebotes, tenemos que resolver la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{64}{81} \\ 6\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} &= \frac{64}{81} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} &= \frac{32}{243} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \\ n-1 &= 5 \\ n &= 6. \end{aligned}$$

Concluimos que la pelota rebotó 6 veces.

Serie Geométrica

La sumatoria indicada de los términos de una secuencia geométrica se llama serie geométrica. Para encontrar el valor de una sumatoria geométrica, podemos usar un procedimiento similar al utilizado para encontrar el valor de una sumatoria aritmética.

Considere la secuencia geométrica $a_n = 2^{n-1}$. Sea S_{10} la suma de los primeros 10 términos de esta secuencia geométrica

$$S_{10} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512.$$

Multiplique esta suma por -2 para obtener

$$-2S_{10} = -2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 64 - 128 - 256 - 512 - 1024.$$

Observe que si sumamos $-2S_{10}$ a S_{10}, entonces se cancelan la mayoría de los términos.

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
S_{10} & = & 1 & + & 2 & + & 4 & + & 8 & + & \cdots & + & 512 & & \\
-2S_{10} & = & & - & 2 & - & 4 & - & 8 & - & \cdots & - & 512 & - & 1024 \\
\hline
-S_{10} & = & 1 & & & & & & & & & & & - & 1024
\end{array}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
-S_{10} &= 1 - 1024 \\
-S_{10} &= -1023 \\
S_{10} &= 1023.
\end{aligned}$$

Esta técnica para conseguir esta suma se puede aplicar a cualquier serie geométrica.

Sea S_n la suma de los primeros n términos de una secuencia geométrica $a_n = ar^{n-1}$, i.e.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}.$$

Note que si sumamos $-rS_n$ a S_n, entonces la mayoría de los términos de la serie desaparecen Por lo tanto,

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
S_n & = & a & + & ar & + & ar^2 & + & ar^3 & + & \cdots & + & ar^{n-1} & & \\
-rS_n & = & & - & ar & - & ar^2 & - & ar^3 & - & \cdots & - & ar^{n-1} & - & ar^n \\
\hline
S_n - rS_n & = & a & & & & & & & & & & & - & ar^n
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
S_n - rS_n &= a - ar^n \\
(1-r)S_n &= a(1-r^n) \\
S_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r}
\end{aligned}$$

Teorema 11.3.6. Si S_n representa la suma de los primeros n términos de una serie geométrica con primer término a y razón común r ($r \neq 1$, entonces

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Ejemplo 11.3.7. Encuentre el valor de cada serie geométrica.

1. $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{243}$

   Solución: Primero note que la razón común es $1/3$, mientras el primer término es 1. Por lo tanto,
$$a_n = ar^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$
   Ahora necesitamos conseguir la cantidad de términos en esta serie. Para esto, tenemos que resolver la ecuación
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{243} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{5} \\ n-1 &= 5 \\ n &= 6. \end{aligned}$$
   O sea, la serie tiene 6 términos y queremos calcular S_6. Observe que
$$\begin{aligned} S_6 &= \frac{a(1-r^6}{1-r} \\ &= \frac{1-(1/3)^6}{1-(1/3)} \\ &= \frac{1-(1/729)}{2/3} \\ &= \frac{728/729}{2/3} \\ &= \frac{728}{729} \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{364}{243}. \end{aligned}$$

2. $\displaystyle\sum_{j=0}^{10} 100(1.05)^j.$

   Solución: Primero observe que
$$\sum_{j=0}^{10} 100(1.05)^j = 100 + 100(1.05) + 100(1.05)^2 + \cdots + 100(1.05)^{10}.$$
   Esto implica que en esta serie geométrica, $a = 100, r = 1.05$ y $n = 11$, por lo

tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{10} 100(1.05)^j &= S_{11}\\ &= \frac{a(1-r^{11}}{1-r}\\ &= \frac{100(1-(1.05)^{11}}{1-(1.05)}\\ &\approx 1420.68.\end{aligned}$$

Series Geométricas Infinitas

En la serie geométrica

$$2+4+8+16+\cdots,$$

la cual tiene razón común $r = 2$, los términos se van haciendo más grandes y más grandes. Por lo tanto, la suma de los primeros n términos de esta serie crece sin cota cuando n crece. En la serie geométrica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots,$$

la cual tiene razón común $r = 1/2$, los términos se van haciendo cada vez más pequeños, por lo tanto, es razonable pensar que esta serie no va a infinito. Veamos que este es el caso.

Sea S_n la suma de los primeros n términos de la segunda serie. Note que en este caso $a = 1$ y $r = 1/2$, por lo tanto

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r}\\ &= \frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)}.\end{aligned}$$

Observe que en esta fórmula, la única expresión que depende de n es $(1/2)^n$. Ahora, cuando n se hace grande, esto es, cuando $n \to \infty$, $(1/2)^n$ se hace bien pequeño, esto es, $(1/2)^n \to 0$. Por lo tanto, cuando $n \to \infty$, entonces

$$S_n = \frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)} \to \frac{1-0}{1-(1/2)} = \frac{1}{1/2} = 2.$$

En este caso decimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2.$$

En general, si $a_n = ar^{n-1}$ es una secuencia geométrica con $|r| < 1$ y

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} ar^{j-1},$$

entonces

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

Como $|r| < 1$, entonces $r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, por lo tanto, cuando $n \to \infty$, entonces

$$S_n \to \frac{a}{1-r}.$$

Por lo tanto, tenemos

Teorema 11.3.8. Suponga que $|r| < 1$, entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} ar^{j-1} = \frac{a}{1-r}.$$

Ejemplo 11.3.9. Encuentre el valor de las siguientes series geométricas infinitas.

1. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots$.

   Solución: Note que el primer término de la serie es 1 y la razón común es 1/3, Por lo tanto, el valor de esta serie es

   $$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j = \frac{1}{1-1/3} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}.$$

2. $\sum_{j=1}^{\infty} 100(-0.99)^j$.

   Solución: Note que esta serie se puede escribir como

   $$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} 100(-0.99)^j &= \sum_{j=1}^{\infty} 100(-0.99)(-0.99)^{j-1} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} -99(-0.99)^{j-1}. \end{aligned}$$

   Por lo tanto, el primer término es -99 y la razón común es $r = -0.99$. Concluimos que

   $$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} 100(-0.99)^j &= \frac{-99}{1-(-0.99)} \\ &= \frac{-99}{1.99} \\ &= -\frac{9900}{199}. \end{aligned}$$

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} 3(1.01)^i$.

   Solución: Note que el primer término es 3, pero la razón común es 1.01. Como el valor absoluto es mayor que 1, entonces esta serie geométrica no converge.

4. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} 5(0.3)^n$.

   Solución: Primero tenemos que escribir esta serie de tal forma que el índice empiece en 1. Para lograr esto, defina $j = n - 2$. Note que mientras n va desde 3 a ∞, j va desde 1 a ∞. Escriba n en términos de j, i.e. $n = j + 2$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty} 5(0.3)^n &= \sum_{j=1}^{\infty} 5(0.3)^{j+2} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} 5(0.3)^{j-1}(0.3)^3 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} 5(0.027)(0.3)^{j-1} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (0.135)(0.3)^{j-1}.\end{aligned}$$

   Ahora es claro que el primer término es 0.135 y la razón común es $r = 0.3$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty} 5(0.3)^n &= \frac{0.135}{1-0.3} \\ &= \frac{0.135}{0.7} \\ &= \frac{135/1000}{7/10} \\ &= 27/140.\end{aligned}$$

Aplicaciones

Ejemplo 11.3.10. Convierta cada decimal a fracción.

1. $0.33333333\cdots$

   Solución: Observe que

$$\begin{aligned}0.3333333\cdots &= 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + 0.00003 + \cdots \\ &= 0.3 + 0.3 \times 10^{-1} + 0.3 \times 10^{-2} + 0.3 \times 10^{-3} + 0.3 \times 10^{-4} + \cdots\end{aligned}$$

Note que ésta es una serie geométrica con primer término 0.3 y razón constante $r = 10^{-1} = 1/10$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0.3333333\cdots &= \frac{0.3}{1-10^{-1}} \\ &= \frac{0.3}{1-10^{-1}} \\ &= \frac{3/10}{9/10} \\ &= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2. $1.2417417417417\cdots$

Solución: Observe que

$$\begin{aligned} 1.2417417417417\cdots &= 1 + 0.2 + 0.0417 + 0.0000417 + 0.0000000417 + \cdots \\ &= 1 + \frac{2}{10} + \frac{417}{10^4} + \frac{417}{10^7} + \frac{417}{10^{10}} + \cdots \\ &= \frac{6}{5} + \frac{417}{10^4}\left(1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^9} + \cdots\right) \\ &= \frac{6}{5} + \frac{417}{10^4}\left(1 + \frac{1}{10^3} + \left(\frac{1}{10^3}\right)^2 + \left(\frac{1}{10^3}\right)^3 + \cdots\right) \end{aligned}$$

Note que

$$1 + \frac{1}{10^3} + \left(\frac{1}{10^3}\right)^2 + \left(\frac{1}{10^3}\right)^3 + \cdots$$

es una serie geométrica con $a = 1$ y $r = 1/10^3$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{10^3} + \left(\frac{1}{10^3}\right)^2 + \left(\frac{1}{10^3}\right)^3 + \cdots &= \frac{1}{1-1/10^3} \\ &= \frac{1}{999/1000} \\ &= \frac{1000}{999}. \end{aligned}$$

Finalmente, note que

$$\begin{aligned} 1.2417417417417\cdots &= \frac{6}{5} + \frac{417}{10^4}\left(1 + \frac{1}{10^3} + \left(\frac{1}{10^3}\right)^2 + \left(\frac{1}{10^3}\right)^3 + \cdots\right) \\ &= \frac{6}{5} + \frac{417}{10^4}\left(\frac{1000}{999}\right) \\ &= \frac{827}{666}. \end{aligned}$$

Ejemplo 11.3.11. Una pareja tuvo una recién nacida y decidieron ahorrar para los estudios universitarios de su hija. El día del nacimiento, ellos invirtieron \$3,000 a 6% de interés compuesto anualmente. Encuentre la cantidad de dinero de la inversión al finalizar cada uno de los primeros cuatro años. Encuentre una fórmula para la cantidad de dinero al final del n-ésimo año. Encuentre la cantidad de dinero al final de los 18 años.

Solución: Al finalizar el primer año, la cantidad de dinero es \$3000(1.06). Al finalizar el segundo año, la cantidad es $\$3000(1.06)^2$. Continúe de esta manera para conseguir

$$\begin{aligned} a_1 &= 3000(1.06) = \$3180 \\ a_2 &= 3000(1.06)^2 = \$3370.80 \\ a_3 &= 3000(1.06)^3 = \$3573.05 \\ a_4 &= 3000(1.06)^4 = \$3787.43. \end{aligned}$$

La fórmula para el n-ésimo término es $a_n = 3000(1.06)^n$. Al finalizar el año 18, la cantidad de dinero será

$$a_{18} = 3000(1.06)^{18} = \$8563.02.$$