Programa Inmersión, Verano 2024
Notas escritas por Dr. M

Notas del cursos. Basadas en los prontuarios de MATE 3001 y MATE 3171

Clase #3: miércoles, 26 de junio de 2024.

3 Decimales

3.1 Sistema de numeración

Considere el entero 24356. Note que

$$\begin{aligned} 24356 &= 20000 + 4000 + 300 + 50 + 6 \\ &= 2 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0. \end{aligned}$$

O sea, el entero 24356 puede escribirse como una suma en la cual cada sumando es una potencia de 10 multiplicada por uno de los dígitos $0, 1, 2, 3, \cdots, 9$. Esto no es especial para este número, en realidad lo mismo ocurre para cualquier entero. De forma análoga, podemos expresar cualquier fracción (en realidad, cualquier real) como una suma en la cual cada sumando es una potencia de 10 o el reciproco de una de estas potencias de 10 multiplicado por uno de los dígitos $0, 1, 2, 3, \cdots, 9$.

Algunas fracciones tienen representación bien sencilla, por ejemplo,

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10},$$

mientras otras son un poco más complicadas

$$\begin{aligned} \frac{3}{20} &= \frac{15}{100} = \frac{10+5}{100} \\ &= \frac{10}{100} + \frac{5}{100} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{5}{10^2}. \end{aligned}$$

Para encontrar la representación de una fracción, es conveniente utilizar la notación decimal. Considere la siguiente tabla:

Décima	Centésima	Milésima	Diez-milésima	$\cdots$
$1/10$	$1/100$	$1/1000$	$1/1000$	$\cdots$
$1/10^1$	$1/10^2$	$1/10^3$	$1/10^4$	$\cdots$
0.1	0.01	0.001	0.0001	$\cdots$

Oberve que escribimos $1/10$ como 0.1, $1/100$ como 0.01, etc. En esta notación, todo lo que este a la derecha del punto (el cual llamamos punto decimal) representa recíprocos de potencias de 10. La notación decimal no solo funciona para recíprocos de potencias de 10, en general, podemos encontrar una reprecentación como la siguiente: 37.2451. Bajo esta representación, todo lo que este a la izquierda del punto es un entero (el cual llamamos parte entera) y su representación se puede escribir como pontencias de 10. Por ejemplo, $37 = 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$. Todo lo que este a la derecha del punto, al igual que el caso anterior, representa recíprocos de potencias de 10. El dígito que aparezca una unidad a la derecha del punto corresponde a la potencia $1/10$, el dígito que aparezca dos unidades a la derecha del punto corresponde a la potencia $1/10^2$, el dígito que aparezca tres unidades a la derecha del punto corresponde a la potencia $1/10^3$, y así sucesivamente.

Ejemplo 3.1.1. El número 37.2451 nos dice que tenemos 3 veces 10^1, 7 veces 10^0, 2 veces $1/10^1$, 4 veces $1/10^2$, 5 veces $1/10^3$ y 1 vez $1/10^4$. Por lo tanto,

$$37.2451 \quad = \quad 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10^2} + 5 \cdot \frac{1}{10^3} + 1 \cdot \frac{1}{10^4}.$$

Ejemplo 3.1.2. El decimal 0.232 nos dice que tenemos 2 veces $1/10$, 3 veces $1/10^2$ y 2 veces $1/10^3$. Por lo tanto,

$$0.232 \quad = \quad 2 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10^2} + 2 \cdot \frac{1}{10^3}$$

Por cierto, note que

$$\frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{2}{10^3} = \frac{29}{125}.$$

O sea, $29/125$ tiene como representación de potencias de 10 a

$$\frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{2}{10^3}.$$

Note que si una representación decimal termina, entonces se puede representar como una fracción que es equivalente a una con denominador que es una potencia de 10. Por ejemplo, 0.234 es equivalente a

$$\frac{234}{1000},$$

que en forma reducida es $117/500$, pero lo importante es que siempre se puede escribir como una fracción con denominador que es una potencia de 10. Otro ejemplo es 73.43. En este caso, este número corresponde a

$$\frac{7343}{100}.$$

El decimal 0.005 corresponde a

$$\frac{5}{1000},$$

el cuál, en forma reducida, es igual a $1/200$.

En la próxima sección, estudiaremos la representación decimal de fracciones.

3.2 Representación decimal de las fracciones

En la sección anterior, notamos que es relativamente fácil escribir una fracción de forma decimal si ésta aparece expresada como una suma en la cual cada sumando es el recíproco de alguna potencia de 10 multiplicao por uno de los dígitos $0, 1, 2, \cdots 9$. Sin embargo, en general, el proceso de escribir una fracción cualquiera en forma decimal no es tan sencillo.

Para representar una fracción p/q en forma decimal, escribimos p como un deimal usando la notación

$$q\overline{)p.0000\cdots}$$

y llevamos acabo la división. Los posibles residuos son $0, 1, 2, 3, \cdots, q-1$. Si al llevar a cabo la división el residuo nos da cero, hemos terminado el proceso y el cociente obtenido es la representación decimal de p/q. De otra manera, continuamos la división hasta que se repita algún patrón. En este último caso, el proceso de división no termina, pero podemos escribir la representación decimal de la fracción como un decimal periódico.

Ejemplo 3.2.1. Encontremos la representación decimal de 1/2. Note que

$$\begin{array}{r} 0.5 \\ 2\overline{)1.0} \\ \underline{10} \\ 0 \end{array}$$

Por lo tanto, la representación decimal de 1/2 es 0.5.

Ejemplo 3.2.2. Note que haciendo división larga, obtenemos que la representación decimal de 2/3 es $0.66\cdots$.

Ejemplo 3.2.3. Consiga la representación decimal de 2/7.

3.3 Suma y resta de decimales positivos

Para entender las operaciones de suma y resta de decimales, es necesario recordar dos cosas: primero, la importancia de la posición en la notación decimal, y segundo, que podemos combinar fracciones homogéneas con la regla

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}.$$

Ejemplo 3.3.1. Halla la suma de 0.32 y 0.14.

Respuesta: Note que

$$0.32 = \frac{32}{100} \quad \text{y} \quad 0.14 = \frac{14}{100}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0.32 + 0.14 &= \frac{32}{100} + \frac{14}{100} \\ &= \frac{32+14}{100} \\ &= \frac{46}{100} \\ &= 0.46. \end{aligned}$$

Podemos obtener el mismo resultado utilizando el método tradicional de suma (vertical), pero respetando la posición del punto decimal, veamos

$$\begin{array}{r} 0.32 \\ +\,0.14 \\ \hline 0.46 \end{array}$$

Ejemplo 3.3.2. Halla la suma de 0.022 y 0.54.

Respuesta: Note que

$$0.022 = \frac{22}{1000} \quad \text{y} \quad 0.54 = \frac{54}{100} = \frac{540}{1000}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0.022 + 0.54 &= \frac{22}{1000} + \frac{540}{1000} \\ &= \frac{22+540}{1000} \\ &= \frac{562}{1000} \\ &= 0.562 \end{aligned}$$

De nuevo, utilizando el método tradicional de suma , obtenemos el mismo resultado

$$\begin{array}{r} 0.022 \\ +\,0.540 \\ \hline 0.562 \end{array}$$

En realidad, el método tradicional es preferible en muchas ocasiones. Todas estas técnicas aplican también a la resta.

Ejemplo 3.3.3. Resuelva la siguiente resta $50.003 - 3.58$.

Respuesta: Note que

$$\begin{array}{r} 50.003 \\ -\ \ 3.580 \\ \hline 46.423 \end{array}$$

Ejemplo 3.3.4. Resuelva la siguiente resta $4 - 0.934$.

Respuesta: Note que

$$\begin{array}{r} 4.000 \\ -\,0.934 \\ \hline 3.066 \end{array}$$

En resumen, para sumar o restar decimales usamos el siguiente método:

1. Escribimos los sumando colocando los puntos decimales alineados verticalmente, de manera que las posiciones correspondientes queden en la misma columna.

2. Efectuamos la suma o resta de la misma manera que lo hacemos con los enteros.

3. Fijamos el punto decimal en la misma posición que ocupa una vez alineados los sumandos.

3.4 Multiplicación y división de decimales

Para entender bien la multiplicación y división de decimales, trabajemos primero con ejemplos conocidos.

Ejemplo 3.4.1. Recuerde que $3 \times 10 = 30$. Note que $3 = 3.0$. Entonces, la multiplicación es equivalente a

$$3.0 \times 10 = 30$$

Observe que al multiplición por 10, el punto decimal se movió una posición hacia la derecha.

Ejemplo 3.4.2. Veamos ahora un ejemplo de división. Note que $30 \div 10 = 3$. Si escribimos 3 como 3.0, entonces al dividir por 10, obtenemos

$$30 \div 10 = 3.0,$$

lo que es lo mismo que decir que el punto decimal se movió una unidad hacia la izquierda.

Ejemplo 3.4.3. Si ahora multiplicamos $3.0 \times 10^2 = 3.0 \times 100 = 300$. Observe que el punto decimal se movió dos posición hacia la derecha. Al dividir $300 \div 10^2 = 300 \div 100 = 3$. O sea, el punto decimal se mueve dos unidades hacia la izquierda.

Ejemplo 3.4.4. Si ahora multiplicamos $3.0 \times 10^3 = 3.0 \times 1000 = 3000$. Observe que el punto decimal se movió tres posición hacia la derecha. Al dividir $3000 \div 10^3 = 3000 \div 1000 = 3$. O sea, el punto decimal se mueve tres unidades hacia la izquierda.

De lo anterior se desprende la siguiente regla:

1. Multiplicar un número por una potencia de 10 equivale a mover el punto decimal hacia la derecha tantos sitios como indique la potencia de 10.

2. Dividir un número por una potencia de 10 equivale a mover el punto decimal hacia la izquierda tantos sitios como indique la potencia de 10.

Para sumar y restar decimales, recurrimos a las operaciones que conocíamos en las fracciones. Para multiplicar haremos lo mismo, esto es, usaremos la regla de multiplicación de fracciones.

Ejemplo 3.4.5. Halle el producto (0.53)(1.6).

Respuesta: Note que

$$\begin{aligned}
(0.53)(1.6) &= \frac{53}{100} \cdot \frac{16}{10} \\
&= \frac{53 \times 16}{100 \times 10} \\
&= \frac{848}{1000} = 0.848.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.4.6. Halle el producto (0.04)(0.231).

Respuesta: Note que

$$\begin{aligned}
(0.04)(0.231) &= \frac{4}{100} \cdot \frac{231}{1000} \\
&= \frac{(4)(231)}{(100)(1000)} \\
&= \frac{924}{100000} = 0.00924.
\end{aligned}$$

Repasemos estos dos ejemplos. Primero repasemos el producto (0.53)(1.6). Igonre los puntos decimales por el momento. Note que $53 \times 16 = 848$ y estos son exactamente los mismos dígitos que aparecen en el producto (0.53)(1.6), excepto, claramente, por la posición del punto decimal. Ahora bien, note que 0.53 tiene dos lugares decimales, mientras que 1.6 tiene uno. En total, entre los dos, tenemos 3 lugares decimales. Note que la respuesta 0.848 tiene exactamente los mismos dígitos que aparecen en 848, pero con 3 lugares decimales.

Repasemos ahora el producto (0.04)(0.231). Otra vez, ignore los puntos decimales. Note que 4×231 es 924 y 924 tiene exactamente los mismos dígitos (excepto por los ceros a la izquierda) que el resultado del producto (0.04)(0.231). De nuevo, note que 0.04 tiene dos lugares decimales, mientras que 0.231 tiene tres. Entre ambos, tenemos cinco lugares decimales. Note que la respuesta 0.00924 tiene exactamente los mismos dígitos que aparecen en 924, pero con 5 lugares decimales.

En resumen, para multiplicar decimales postivos, seguimos el siguiente método:

1. Se multiplican los números como se hace con los enteros.

2. Se suma el número de lugares decimales en cada uno de los factores para fijar el punto decimal en el producto. Ese total de lugares en el producto se cuenta de derecha a izquierda y se fija en el punto decimal.

División de decimales positivos

Desarrollaremos un método para la división de decimales análogo a la división de enteros y usaremos las reglas de división de fracciones

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Ejemplo 3.4.7. Divida $0.405 \div 0.03$.

Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} 0.405 &= \frac{405}{1000} \\ 0.03 &= \frac{3}{100}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{0.405}{0.03} &= \frac{405}{1000} \cdot \frac{100}{3} \\ &= \frac{405}{30} \\ &= \frac{135}{10} = 13.5. \end{aligned}$$

También lo podemos hacer de la siguiente manera. Note que

$$\frac{0.405}{0.03} = \frac{(0.405)(100)}{(0.03)(100)} = \frac{40.5}{3}.$$

Ahora proceda con la división larga $3\overline{)40.5}$ para obtener el mismo resultado.

Ejemplo 3.4.8. Divida $1.728 \div 1.2$.

Respuesta: Note que

$$\frac{1.728}{1.2} = \frac{(1.728)(10)}{(1.2)(10)} = \frac{17.28}{12}.$$

Ahora proceda con la división larga $12\overline{)17.28}$ para obtener el resultado 1.44.

En resumen, el método de división de decimales es el siguiente:

1. Para dividir dos números decimales, se multiplica el divisor y el dividendo por aquella potencia de 10 que convierte al divisor en un entero.

2. Se coloca el punto decimal del cociente alineado con el punto decimal del dividendo.

3. Se lleva a cabo la división como si dividendo y divisor fueran enteros.

3.5 ¿Cómo escribir un decimal periódico infinito en la forma a/b?

Es un hecho matemático que la representación decimal de toda fracción es finita o periódica infinita. En esta sección veremos que todo decimal periódico infinito se puede escribir como una fracción común.

Ejemplo 3.5.1. Empecemos con el ejemplo clásico, esto es, $0.\bar{3} = 0.333333333333\cdots$. Sea $x = 0.333333333333\cdots$. Note que si multiplicamos por 10, obtenemos

$$\begin{aligned} 10x &= 10(0.3333333333333333\cdots) \\ &= 3.3333333333333\cdots \\ &= 3 + 0.3333333333333\cdots \\ &= 3 + x. \end{aligned}$$

En otras palabras, $10x = 3 + x$. Por lo tanto $10x - x = 3$. O sea, $9x = 3$ y por lo tanto $x = 3/9 = 1/3$.

Ejemplo 3.5.2. Considera ahora el decimal $0.\overline{17} = 0.17171717\cdots$. Sea $x = 0.17171717\cdots$. Multiplique por 100 para obtener que

$$\begin{aligned} 100x &= 100(0.17171717\cdots) \\ &= 17.17171717\cdots \\ &= 17 + 0.17171717\cdots \\ &= 17 + x. \end{aligned}$$

En otras palabras, $100x = 17 + x$. Por lo tanto $100x - x = 17$. O sea, $99x = 17$ y por lo tanto $x = 17/99$.

Ejemplo 3.5.3. Considere ahora el decimal $0.21\bar{4} = 0.21444444\cdots$. El método para encontrar la fracción que corresponde a este decimal es un poco más complicado. Sea $x = 0.21444444\cdots$. Multiplique por 1000 para obtener que

$$\begin{aligned} 1000x &= 1000(0.21444444\cdots) \\ &= 214.44444444\cdots \\ &= 214.\bar{4} \end{aligned}$$

Ahora multiplique por 100 para obtener

$$\begin{aligned} 100x &= 100(0.21444444\cdots) \\ &= 21.4444444\cdots \\ &= 21.\bar{4} \end{aligned}$$

Ahora reste $1000x$ y $100x$ para obtener

$$\begin{array}{rl} 1000x = & 214.\bar{4} \\ -\ 100x = & 21.\bar{4} \\ \hline 900x = & 193.0 \end{array}$$

Por lo tanto, $x = 193/900$.

En resumen:

1. Observa el patrón repetitivo en cada caso.
2. Escribe x igual al número dado.
3. Multiplica por potencias de 10 apropiadas.
4. Resta para eliminar la parte que se repite.
5. Divide para obtener el valor de x como fracción.

3.6 Por ciento

Es muy probable que en algún momento hayas escuchado la expresión por ciento. Por ejemplo, el por ciento de aumento en el costo de vida. Otro ejemplo puede ser el por ciento de descuento que puede tener el precio de una mercancía. Finalmente, otro ejemplo puede ser que obtengas 93% en tu primer examen del curso de inmersión.

Cuando se escribe 1%, el cual se lee "uno por ciento", lo que se refiere es a una parte de cien, y lo escribimos como fracción común o decimal de la siguiente forma

$$1\% = \frac{1}{100} = 0.01.$$

También, para cualquier n no negativa, definimos el $n\%$ de la siguiente manera

$$n\% = \frac{n}{100}.$$

Ejemplo 3.6.1. Por ejemplo,

- $40\% = \dfrac{40}{100}$
- $9\% = \dfrac{9}{100}$
- $75\% = \dfrac{75}{100}$.

Por ciento	**Fracción común**	**Fracción decimal**
25%	25/100 = 1/4	0.25
40%	40/100 = 2/5	0.40
75%	75/100 = 3/4	0.75
62.5%	62.5/100 = 5/8	0.625

¿Cómo usamos el concepto de por ciento para obtener información acerca de poblaciones o del precio de venta en especial? Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.6.2. Un artículo está marcado en \$400 y tiene 20% de descuento. ¿Cuánto tendremos que pagar si queremos comprar el artículo?

Respuesta: Lo primero que tenemos que hacer es encontrar el 20% de \$400. Para esto, multiplique 400 por $20\% = 20/100 = 1/5$. Entonces,

$$400\left(\frac{1}{5}\right) = 80.$$

O sea, en términos de dólares, el artículo cuesta \$80 menos. O sea, si queremos comprar el artículo, tenemos que pagar

$$\$400 - \$80 = \$320.$$

Ejemplo 3.6.3. Suponga que tomaste un examen de 120 preguntas y sacaste 95% en el examen. ¿Qué cantidad de preguntas contestaste correctamente?

Respuesta: Como obtuviste 95% en el examen, entonces contestaste correctamente 95% de las preguntas. O sea,

$$\begin{aligned} 120\left(\frac{95}{100}\right) &= 120\left(\frac{19}{20}\right) \\ &= 120\left(\frac{19}{20}\right) \\ &= \frac{120}{20}\cdot 19 \\ &= 6 \times 19 = 114. \end{aligned}$$

Por lo tanto, contestaste correctamente 114 preguntas.

Ejemplo 3.6.4. ¿De qué número x es 120 el 40%?

Respuesta: Note que sabemos que 120 es el 40% del número x que desconocemos. Entonces, pasando del castellano a la matemática, tenemos la ecuación

$$120 = x \times 40\%$$

O sea,

$$\begin{aligned} \frac{40}{100}x &= 120 \\ \frac{2}{5}x &= 120 \\ 2x &= 5(120) \\ x &= \frac{5}{2}(120) \\ x &= 5(60) \\ x &= 300. \end{aligned}$$

Concluimos que 120 es el 40% de 300.

Ejemplo 3.6.5. De 125 estudiantes en la clase de Cálculo, 65 recibieron A o B en el último examen. ¿Qué por ciento de los estudiantes recibió menos de B en el último examen?

Respuesta: Note que 65 de 125 recibieron A o B. Esto representa una proporción de

$$\frac{65}{125} = \frac{13}{25} = \frac{13(4)}{25(4)} = \frac{52}{100} = 0.52.$$

O sea, el 52% de los estudiantes recibieron A o B. Por lo tanto, el resto de los estudiantes, o el

$$100\% - 52\% = 48\%$$

recibieron una nota menor a B.