Programa Inmersión, Verano 2024
Notas escritas por Dr. M

Notas del cursos. Basadas en los prontuarios de MATE 3001 y MATE 3171

Clase #4: jueves, 27 de junio de 2024.

4 Conjunto de los números reales

4.1 Conceptos básicos

Definición 4.1.1. Un decimal es un número irracional si no se puede representar en la forma a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$.

Anteriormente discutimos el hecho de que un número es racional si y solo si su expansión decimal es finita o infinita periódica. Por lo tanto, los números irracionales tienen la particularidad que su expresión decimal es infinita y no periódica.

Ejemplo 4.1.2. Algunos ejemplos de números irracionales son:

- $0.101001000100001000001\cdots$
- $0.123456789101112131415\cdots$
- $0.2468101214161820222 4\cdots$
- $1.414213562373095048801\cdots$

Uno de los números irracionales más celebrados es π. Su expansión decimal empieza de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\pi \;=\; & 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459\\ & 2307816406286208998628034825342117067982148086513282306647093844\\ & 6095505822317253594081284811174502841027019385211055596446229489\\ & 5493038196442881097566593344612847564823378678316527120190914564\\ & 856692346034861045432664821339360726024914127372458700660 63\cdots\end{aligned}$$

Es un hecho que la suma o resta de un número irracional con un número racional es irracional. Por ejemplo, $2+\pi$, $\dfrac{1}{5}+\pi$, etc. son irracionales.

Uno de los primeros números en identificarse como irracional (si no es el primero) es $\sqrt{2}$. Es más, en clase se demostró que este número es realmente irracional. Nota que $\sqrt{2}$ es el número positivo tal que $(\sqrt{2})^2 = 2$. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 4.1.3. Si $a \geq 0$, el número $c \geq 0$ tal que $c^2 = a$ se llama la raíz cuadrada de a y se representa como $\sqrt{a}$.

Ejemplo 4.1.4. Algunos ejemplos (raíces perfectas):

- Note que $\sqrt{1} = 1$, pues $1^2 = 1$.
- Note que $\sqrt{4} = 2$, pues $2^2 = 4$.
- Note que $\sqrt{81} = 9$, pues $9^2 = 81$.
- Note que $\sqrt{1225} = 35$, pues $35^2 = 1225$.

No todos los números positivos tiene raíces "perfectas" como las anteriores. Existen números, como el 5, que tiene raíz cuadrada $\sqrt{5}$ irracional. En realidad, si escogemos cualquier primo p, entonces es un hecho que $\sqrt{p}$ es irracional. Entonces, ante este hecho, la pregunta que surge es la siguiente: ¿Existe alguna forma de aproximar la expresión decimal de raíces cuadradas irracionales? La respuesta es SÍ.

Ejemplo 4.1.5. Considere $\sqrt{5}$. Primero note que $2 < \sqrt{5} < 3$, pues $2^2 = 4 < 5 = (\sqrt{5})^2 < 9 = 3^2$. Por lo tanto, la parte entera de la representación decimal de $\sqrt{5}$ es 2. Verifiquemos ahora la décima.

- ¿Puede estar $2.0 < \sqrt{5} < 2.1$? La respuesta es no, pues $4.0 = (2.0)^2 < (\sqrt{5})^2 = 5 < (2.1)^2 = 4.41$ es falso.
- ¿Puede estar $2.1 < \sqrt{5} < 2.2$? La respuesta es no, pues $4.41 = (2.1)^2 < (\sqrt{5})^2 = 5 < (2.2)^2 = 4.84$ es falso.
- ¿Puede estar $2.2 < \sqrt{5} < 2.3$? La respuesta es sí, pues $4.84 = (2.2)^2 < (\sqrt{5})^2 = 5 < (2.3)^2 = 5.29$ es cierto.

Por lo tanto, la forma decimal de $\sqrt{5}$ empieza de la forma 2.2. ¿Qué tal si encontramos la centésima? Veamos:

- ¿Puede estar $2.20 < \sqrt{5} < 2.21$? La respuesta es no, pues $4.84 = (2.20)^2 < (\sqrt{5})^2 = 5 < (2.21)^2 = 4.8841$ es falso.
- ¿Puede estar $2.21 < \sqrt{5} < 2.22$? La respuesta es no, pues $4.8841 = (2.21)^2 < (\sqrt{5})^2 = 5 < (2.22)^2 = 4.9284$ es falso.
- ¿Puede estar $2.22 < \sqrt{5} < 2.23$? La respuesta es no, pues $4.9284 = (2.22)^2 < (\sqrt{5})^2 = 5 < (2.23)^2 = 4.9729$ es falso.
- ¿Puede estar $2.23 < \sqrt{5} < 2.24$? La respuesta es sí, pues $4.9729 = (2.23)^2 < (\sqrt{5})^2 = 5 < (2.24)^2 = 5.0176$ es cierto.

Por lo tanto, la forma decimal de $\sqrt{5}$ empieza de la forma 2.23. Si continúa de esta manera, encontrará que

$$\sqrt{5} = 2.236067977499789696409173668731276235440 6\cdots$$

4.2 Conjunto de los números reales

Repasemos algunos de los conjuntos que hemos considerado (hasta ahora) en esta clase. El primer conjunto que consideramos fue $\mathbb{N}$, el cual representa el conjunto de todos los números naturales. También hemos considerado (aunque muy poco) el conjunto $\mathbb{Z}$, el cual representa el conjunto de todos los números enteros. El último conjunto que hemos considerado es

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N} \right\}.$$

Este conjunto se conoce como el conjunto de los racionales positivos. El conjunto $\mathbb{Q}^+$ puede extenderse al conjunto de todos los racionales, el cual está definido por

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ con } b \neq 0 \right\}.$$

Note que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

En la sección anterior notamos que existen números que no son racionales, por ejemplo, $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{5}$, etc. Estos números se conocen como irracionales. La unión del conjunto de todos los racionales con el conjunto de todos los irracionales se conoce como el conjunto de los números reales y es denotado por $\mathbb{R}$. Note que

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Si $a \in \mathbb{R}$, el opuesto de a, denotado por $-a$, tiene la propiedad de que $a+(-a) = 0$. Note que si a es postivo, entonces $-a$ es negativo, mientras si a es negativo, entonces $-a$ es postivo. Note que el cero 0 es especial, pues es el único real que satisface $x + x = 0$. O sea, $-0 = 0$. Por lo tanto, 0 no es positivo ni negativo. A la izquierda de 0 están los negativos, mientras a su derecha están los números positivos. Por tal razón decimos que 0 es el "origen" de la recta real (no hemos definido recta real formalmente, pero estoy seguro que han visto la definición anteriormente).

Dado un número real, podemos pensar en la "distancia" entre tal número y el origen 0. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 4.2.1. La distancia a la cual se encuantra el punto a del punto 0 se llama el valor absoluto de a y se representa como $|a|$. Note que

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 4.2.2. Note que

- $|3| = 3$
- $|-\sqrt{2}| = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

Algunas propiedades de los números reales.

Propiedad 4.2.3. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces

1. $a + 0 = a$
2. $a + (-a) = 0$
3. $(-a) + (-b) = -(a + b)$
4. $a + b = b + a \in \mathbb{R}$
5. $a + (b + c) = (a + b) + c$.

4.3 Multiplicación y división de números reales

Empezamos esta sección con el siguiente hecho.

Teorema 4.3.1. Si $a > 0$, $b > 0$, entonces $(-a)b = a(-b) = -ab$.

Demostración: Recuerde que $b(0) = 0$ (lo demostramos en clase anteriormente), entonces

$$\begin{aligned} b(-a + a) &= 0 \\ b(-a) + ba &= 0 \\ (-a)b + ab &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, $(-a)b = -ab$. De forma similar se demuestra que $a(-b) = -ab$. Muerto el Pollo.

De forma similar se puede demostrar que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $(-a)(-b) = ab$.

Ejemplo 4.3.2. Note que

1. $(-2)(-3) = 6$
2. $(-2)(3) = -6$
3. $(-\sqrt{2})(-\pi) = \pi\sqrt{2}$.

Al igual que los números naturales, los números reales satisfacen, bajo las operaciones de suma y multiplicación, las propiedades de clausura, asociatividad, conmutatividad y ley distributiva.

La división de números reales está bien definida simpre y cuando el dividendo sea distinto de cero, esto es, si $a, b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, entonces $a \div b$ es el número real c tal que $a = bc$. Las propiedades discutidas arriba para la multiplicación también funcionan para la división. Lo más importante cuando estemos trabajando con multiplicación y división de reales es la regla de los signos.

Regla de signos

1. Si divimos o multiplicamos dos números reales con signos opuestos, el resultado es negativo.
2. Si divimos o multiplicamos dos números reales con el mismo signo, el resultado es positivo.

4.4 Exponenciación de números reales

Definición 4.4.1. So $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces definimos

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ veces}}.$$

El número a se llama base, mientras el número n se llama exponente.

Ejemplo 4.4.2. Algunos ejemplos:

1. $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.
2. $\sqrt{2}^5 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.
3. $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$.
4. $-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$.

A continuación algunas propiedades de los exponentes.

Propiedad 4.4.3. Si $a \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $a^{m+n} = a^m a^n$.

Demostración: Note que

$$\begin{aligned} a^m a^n &= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ veces}} \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ veces}} \\ &= \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{m+n \text{ veces}} \\ &= a^{m+n}. \end{aligned}$$

Muerto el Pollo.

Ejemplo 4.4.4. Note que

1. $2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 = 32 = 2^5$
2. $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$.

Propiedad 4.4.5. Si $a \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $(a^n)^m = a^{nm}$.

Demostración: Note que

$$\begin{aligned} (a^n)^m &= \underbrace{a^n \cdot a^n \cdots a^n}_{m \text{ veces}} \\ &= \underbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ veces}} \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ veces}} \cdots \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ veces}}}_{m \text{ veces}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{nm \text{ veces}} \\ &= a^{nm} \end{aligned}$$

Muerto el Pollo.

Ejemplo 4.4.6. Note que

1. $((-3)^3)^5 = (-3)^{15}$
2. $((\sqrt{2})^5)^2 = (\sqrt{2})^{10} = 32.$

Propiedad 4.4.7. Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} (ab)^n &= a^n b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}, \quad \text{para } b \neq 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4.8. Note que

1. $6^2 = (2 \times 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$
2. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}.$

Propiedad 4.4.9. Sea $a \in \mathbb{R}$ distinto de cero y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Ejemplo 4.4.10. Note que

1. $\dfrac{2^4}{2^7} = 2^{4-7} = 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$
2. $\dfrac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4 = 81.$

Note el caso especial cuando $m = n$ en la Propiedad 4.4.9. En este caso, tenemos que

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0,$$

pero sabemos que si $a \neq 0$, entonces $a^n/a^n = 1$, por lo tanto, decimos que $a^0 = 1$. También, note el caso especial cuando $n = 0$ en la Propiedad 4.4.9. En este caso, tenemos

$$\frac{1}{a^m} = \frac{a^0}{a^m} = a^{0-m} = a^{-m}.$$

Ejemplo 4.4.11. Note que

1. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = \dfrac{81}{16}$
2. $\dfrac{3^{-2}}{3^2} = 3^{-2-2} = 3^{-4} = \dfrac{1}{81}.$

4.5 Notación científica

Las reglas de exponentes son muy útiles para escribir números que son muy grandes o muy pequeños y para efectuar operaciones con éstos. Cuando trabajamos con estos números, es conveniente escribirlos usando notación científica. Decimos que un número N está en notación científica cuando lo expresamos como el producto de un número $1 \leq p < 10$ por una potencia entera de 10. Esto es

$$N = p \times 10^n,$$

donde $1 \leq p < 10$ y $n \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 4.5.1. Note que

1. $15000 = 1.5 \times 10^4$
2. $2314000 = 2.31 \times 10^6$
3. $0.000000045134 = 4.5134 \times 10^{-8}$
4. $123 \div 0.003 = 41000 = 4.1 \times 10^4$
5. $\left(\frac{3}{50}\right)\left(\frac{7}{1000}\right) = \frac{21}{50000} = \frac{42}{100000} = 0.00042 = 4.2 \times 10^{-4}$.

4.6 Operaciones con radicales

De la misma manera que algunas operaciones son inversas una de la otra, como por ejemplo suma y resta o mutliplicación y división, la operación de radicación es la inversa de la operación de exponenciación.

Notación

Definición 4.6.1. Sea $d \in \mathbb{R}$. La raíz n-ésima de d, representada como $\sqrt[n]{d}$, es el número real a (si existe) que tiene el mismo signo de d y que $a^n = d$. Note que si $d = 0$, entonces $\sqrt[n]{0} = 0$.

Análisis de la definición

1. Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $d \geq 0$, entonces $\sqrt[n]{d} = a$, donde $a \geq 0$ y $a^n = d$.
   (a) Si $d > 0$ y está escrito como un n-ésima potencia de un número a, $a \geq 0$, entonces $\sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{a^n} = a$.
   (b) Si $d > 0$ y está escrito como un n-ésima potencia de un número a, $a < 0$, entonces $\sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{a^n} = |a|$.
2. Si $d < 0$, $n \in \mathbb{N}$ y n es impar, entonces $\sqrt[n]{d} = a$, donde $a < 0$ y $a^n = d$. En particular, si $d < 0$ y está escrito como un n-ésima potencia de a, entonces $\sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{a^n} = a$.

3. Si $d < 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{d}$ no está definido en el conjunto de los reales.

Ejemplo 4.6.2. Note que

1. $\sqrt[5]{-32} = -2$, pues -32 y -2 tienen el mismo signo y $(-2)^5 = -32$.
2. $\sqrt{\dfrac{81}{49}} = \dfrac{9}{7}$, pues $\dfrac{81}{49}$ y $\dfrac{9}{7}$ tienen el mismo signo y $\left(\dfrac{9}{7}\right)^2 = \dfrac{81}{49}$.
3. $\sqrt[3]{0.008} = 0.2$, pues 0.008 y 0.2 tienen el mismo signo y $(0.2)^3 = 0.008$.
4. $\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$.
5. $\sqrt[3]{(-4)^3} = -4$.

Propiedad 4.6.3. Si $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b} \in \mathbb{R}$, entonces $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

Ejemplo 4.6.4. Note que

1. $\sqrt{(64)(25)} = \sqrt{64}\sqrt{25} = 8 \cdot 5 = 40$,
2. $\sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$,
3. $\sqrt[5]{8}\sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{32} = 2$.

Propiedad 4.6.5. Si $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b} \in \mathbb{R}$, entonces $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Ejemplo 4.6.6. Note que

1. $\sqrt{\dfrac{25}{16}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \dfrac{5}{4}$,
2. $\sqrt[3]{\dfrac{-8}{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{-2}{3}$,,

Oberve que ninguna de estas propiedades nos dice algo acerca de la expresión $\sqrt[n]{a \pm b}$. Cuando estemos evaluando radicales de la forma $\sqrt[n]{a \pm b}$, tenemos que primero sumar (o restar) a y b y luego efectuamos la radicación. Por ejemplo,

$$\sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10,$$

mientras

$$\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14 \neq 10.$$

En arroz y habichuelas, $\sqrt{64 + 36} \neq \sqrt{64} + \sqrt{36}$.

Otro ejemplo es el siguiente: $\sqrt[3]{27 + 8}$. Note que

$$\sqrt[3]{27 + 8} = \sqrt[3]{35} \approx 3.271066310,$$

mientras

$$\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{8} = 3 + 2 = 5.$$

Cuando nos enfrentemos combinaciones como $c\sqrt[n]{a} \pm d\sqrt[n]{a}$, observe que podemos aplicar la ley distributiva (al revés) para obtener

$$c\sqrt[n]{a} \pm d\sqrt[n]{a} = (c \pm d)\sqrt[n]{a}.$$

Por ejemplo, $5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$.

Ejemplo 4.1. Simplifique $3\sqrt{16} + 5\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{16}$.

Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} 3\sqrt{16} + 5\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{16} &= 3 \cdot 4 + 5\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{8 \cdot 2} \\ &= 12 + 5\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} \\ &= 12 + 5\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} \\ &= 12 + 9\sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.6.7. Hay veces que la notación científica nos permite calcular radicales de forma más sencilla.

1. $\sqrt{400} = \sqrt{4 \times 10^2} = \sqrt{4} \times \sqrt{10^2} = 2 \times 10 = 20$.
2. $\sqrt{0.0009} = \sqrt{9 \times 10^{-4}} = \sqrt{9} \times \sqrt{10^{-4}} = 3 \times 10^{-2} = \dfrac{3}{100} = 0.03$.
3. $\sqrt{9000} = \sqrt{9 \times 10^3} = \sqrt{9} \times \sqrt{10^2} \times \sqrt{10} = 3 \times 10 \times \sqrt{10} = 30\sqrt{10}$.
4. $\sqrt[3]{0.008} = \sqrt[3]{8 \times 10^{-3}} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt{10^{-3}} = 2 \times 10^{-1} = 0.2$.