Programa Inmersión, Verano 2024
Notas escritas por Dr. M

Notas del cursos. Basadas en los prontuarios de MATE 3001 y MATE 3171

Clase #5: viernes, 28 de junio de 2024.

6 Exponentes

6.1 Generalización del concepto de exponentes

En el capítulo 4 se analizaron la operación de exponenciación y reglas de exponentes para el caso particular en que la base es un número real. Suponga ahora que consideramos expresiones algebraicas como las siguientes:

$$a^3\sqrt{b}+c,\ x^2+x+1,\ \sqrt{x^3+2},\ 1+\sqrt[3]{x+2}+x^4,\ \frac{x}{x+1},\ xy^2.$$

Recuerde que las expresiones algebraicas, cuando se le asigna a las indeterminadas (i.e. a a, b, x, y o cuales sean éstas) un valor real válido, entonces obtenemos un número real. Esto implica que todas las reglas de exponenciación son válidas para estas expresiones.

Ejemplo 6.1.1. La expresión $(2xy)^4$ significa

$$(2xy)(2xy)(2xy)(2xy) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y = 16x^4y^4$$

A continuación un resumen de algunas de las reglas discutidas en el capítulo 4:

Reglas de exponenciación: Suponga que a y b son expresiones algebraicas y $n, m \in \mathbb{N}$, entonces

1. $(ab)^n = a^n b^n$,
2. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, para $b \neq 0$,
3. $(a^n)^m = a^n m$,
4. $a^0 = 1$, para $a \neq 0$,
5. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, para $a \neq 0$.
6. $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$, para $a, b \neq 0$.

Ejemplo 6.1.2. Simplifique las siguientes expresiones algebraicas:

1. $(-2ab)^8 = (-2)^8 a^8 b^8 = 256a^8b^8$.

2. $-(2ab)^8 = -2^8a^8b^8 = -256a^8b^8.$

3. $\left(\frac{3}{2}st\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 s^3t^3 = \frac{27}{8}s^3t^3.$

4. $\left(\frac{3xy}{4tz}\right)^3 = \frac{(3xy)^3}{(4tz)^3} = \frac{27x^3y^3}{64t^3z^3}.$

5. $\left(\frac{-3a}{4xj}\right)^5 = \frac{(-3a)^5}{(4xj)^5} = \frac{(-3)^5a^5}{4^5x^5j^5} = \frac{-243a^5}{1024x^5j^5}.$

6. $(2x^2y)^3 = 2^3(x^2)^3y^3 = 8x^6y^3.$

7. $\left(\frac{9x^3y^4}{4z^2t^3}\right)^3 = \frac{9^3(x^3)^3(y^4)^3}{4^3(z^2)^3(t^3)^3} = \frac{729x^9y^{12}}{64z^6t^9}.$

8. $7\left(\frac{21x^2z^6}{16y^3t^9}\right)^0 = 7.$

6.2 Multiplicación y división de expresiones algebraicas con exponentes enteros positivos

En la sección anterior explicamos que las reglas de exponenciación son válidas para expresiones algebraicas. En esta sección, consideraremos expresiones algebraicas en las cuales las siguientes dos reglas de exponenciación aplican.

Reglas de exponenciación (enteros positivos): multiplicación y división. Sea a una expresión algebraica y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,

2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, para $a \neq 0$.

Ejemplo 6.2.1. Simplifique las siguientes expresiones algebraicas:

1. $(2x^2y^{-3})(3x^3y^4) = (2 \cdot 3)(x^2 \cdot x^3)(y^3 \cdot y^4) = 6x^5y^7.$

2. $(5^4xy^2)(5ax^2y^5) = 5^5ax^3y^7 = 3125ax^3y^7.$

3. $(3x)^6 \div (3x)^4 = 3^6x^6 \div 3^4x^4 = \frac{3^6x^6}{3^4}x^4 = 3^2x^{10} = 9x^{10}.$

4. $\frac{12^3t^4x^3}{6^22^3t^2x} = \frac{(6 \cdot 2)^3t^2x^2}{6^2 \cdot 2^3} = 6t^2x^2.$

5. $4xy^3 + 2x^2y^3 \div 2x^4y + \frac{(x^2y^3)^2}{(xy)^3}$

Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} 4xy^3 + 2x^2y^3 \div 2x^4y + \frac{(x^2y^3)^2}{(xy)^3} &= 3x^2 + 2x^2\left(\frac{y^3}{2}\right)x^4y + \frac{x^4y^6}{x^3y^3} \\ &= 4xy^3 + x^2y^3x^4y + xy^3 \\ &= 5xy^3 + x^6y^4. \end{aligned}$$

6.3 Multiplicación y división de expresiones algebraicas con exponentes enteros

En esta sección, consideraremos expresiones algebraicas en las cuales las siguientes dos reglas de exponenciación aplican.

Reglas de exponenciación (enteros: multiplicación y división. Sea a una expresión algebraica y $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, para $a \neq 0$.

Ejemplo 6.3.1. Simplifique las siguientes expresiones algebraicas:

1. $\left(\dfrac{-2x^3y^{-2}}{3a^{-1}b^3}\right)^{-2} = \dfrac{(3a^{-1}b^3)^2}{(-2x^3y^{-2})^2} = \dfrac{9a^{-2}b^6}{4x^6y^{-4}} = \dfrac{9b^6y^4}{4x^6a^2}$.
2. $(3x^2y^{-3})^4 \cdot (2x^{-2}y^5)^{-2} = 81x^8y^{-12} \cdot \dfrac{1}{4}x^4y^{-10} = \dfrac{81x^{12}}{4y^{22}}$.
3. $\left(\dfrac{3^{-1}x^{-2}y^{-5}}{x^{-3}y^{-4}}\right)^2 = \left(\dfrac{x}{3y}\right)^2 = \dfrac{x^2}{9y^2}$.
4. $\dfrac{2^{-3}x^2y^{-4}}{3^{-2}x^3} = \dfrac{9}{8xy^4}$.
5. $\left(\dfrac{5^{-2}x^3y^{-1}}{3x^{-2}y^2}\right)^{-3} = \dfrac{(3x^{-2}y^2)^3}{(5^{-2}x^3y^{-1})^3} = \dfrac{3^3x^{-6}y^6}{5^{-6}x^9y^{-3}} = \dfrac{3^3 \cdot 5^6y^9}{x^{15}}$

Como se mencionó en el capítulo 4, no existe regla que relacione la suma o resta con la exponenciación. Por lo tanto, tenemos que tener cuidado a la hora de trabajar con exponentes y sumas. Un <u>*error*</u> común que cometén personas que están aprendiendo el material por primera vez es el pensar que

$$\text{(esto es falso)} \quad (a+b)^n = a^n + b^n \quad \text{para } n \in \mathbb{N}$$

es cierto. Por ejemplo, escoja $n = 2$, $a = 2$ y $b = 3$. Note que

$$(2+3)^2 = 5^2 = 25 \neq 13 = 2^2 + 3^2,$$

por lo tanto, en general,

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n.$$

Combinaciones con suma, resta, multiplicación y división

Ejemplo 6.3.2. Simplifique las siguientes expresiones algebraicas:

1. $\left(\dfrac{x^{-2}y^3+2xy^{-1}}{2x^{-1}+y^3}\right)^{-2}$.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^{-2}y^3+2xy^{-1}}{2x^{-1}+y^3}\right)^{-2} &= \left(\frac{\frac{y^3}{x^2}+\frac{2x}{y}}{\frac{2}{x}+y^3}\right)^{-2} \\
&= \left(\frac{\frac{y^4+x^3}{x^2y}}{\frac{2+x^3}{x}}\right)^{-2} \\
&= \left(\frac{y^4+x^3}{x^2y}\cdot\frac{x}{2+x^3}\right)^{-2} \\
&= \left(\frac{y^4+x^3}{xy(2+x^3)}\right)^{-2} \\
&= \left(\frac{xy(2+x^3)}{y^4+x^3}\right)^{2} \\
&= \frac{x^2y^2(2+x^3)^2}{(y^4+x^3)^2}.
\end{aligned}$$

2. $\dfrac{3x^3+y^{-2}+2x^{-2}y}{2x^3+xy^{-2}}$.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned}
\frac{3x^3+y^{-2}+2x^{-2}y}{2x^3+xy^{-2}} &= \frac{3x^3+\frac{1}{y^2}+\frac{2y}{x^2}}{2x^3+\frac{x}{y^2}} \\
&= \frac{\frac{3x^5y^2+x^2+2y^3}{x^2y^2}}{\frac{2x^3y^2+x}{y^2}} \\
&= \left(\frac{3x^5y^2+x^2+2y^3}{x^2y^2}\right)\left(\frac{y^2}{2x^3y^2+x}\right) \\
&= \frac{3x^5y^2+x^2+2y^3}{x^2(2x^3y^2+x)}.
\end{aligned}$$

Igualdad de potencias de la misma base

Si x es un número real, $x \neq 0$, $x = \pm 1$ y $x^a = x^b$, entonces $a = b$.

Ejemplo 6.3.3. Halle el valor de n tal que la ecuación es cierta:

1. $8 = 2^n$.

   Respuesta: Note que $2^3 = 8 = 2^n$, por lo tanto, $n = 3$.

2. $3^{2n-1} = 81$.

   Respuesta: Note que $3^{2n-1} = 81 = 3^4$, por lo tanto, $2n - 1 = 4$. Entonces,

$$\begin{aligned} 2n - 1 &= 4 \\ 2n &= 5 \\ n &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

3. $8^n = 32$.

   Respuesta: Note que $8^n = (2^3)^n = 2^{3n}$ y $32 = 2^5$. Entonces, tenemos que resolver $2^{3n} = 2^5$. La solución está dada por

$$\begin{aligned} 3n &= 5 \\ n &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

6.5 Exponentes racionales

En el capítulo 4 trabajamos con la operación de radicación. Si consideramos la definición de $\sqrt[n]{\cdot}$ aplicada a a^n, obtenemos

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ a, & \text{si } n \text{ es impar y } a < 0 \\ -a, & \text{si } n \text{ es par y } a < 0 \end{cases}$$

Note que esto implica que radicación es la operación inversa de exponenciación. Más aún, suponga que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\sqrt[n]{d} = d^x$. Entonces, $(d^x)^n = d$, i.e. $d^{xn} = d$. En otras palabras, $xn = 1$. Concluimos que $x = 1/n$. Por lo tanto, utilizaremos la siguiente notación $d^{1/n}$ para representar $\sqrt[n]{d}$.

Ejemplo 6.5.1. Algunos ejemplos:

1. $\sqrt{16} = 16^{1/2} = 4$.

2. $\sqrt[4]{81} = 81^{1/4} = 3$.

Observe que ahora podemos hablar de exponentes racionales, pues si $a \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces

$$a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}$$

siempre que $a^{1/n}$ esté definido. Algunas propiedades de potencias racionales:

Propiedad 6.5.2. Suponga que $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n, m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$ con $b, n, n_1 \neq 0$, entonces

1. $(ab)^{m/n} = a^{m/n}b^{m/n}$.
2. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{m/n} = \dfrac{a^{m/n}}{b^{m/n}}$.
3. $a^{m/n}a^{m_1/n_1} = a^{(mn_1+m_1n)/(nn_1)}$.
4. $\dfrac{a^{m/n}}{a^{m_1/n_1}} = a^{(mn_1-m_1n)/(nn_1)}$.

Ejemplo 6.5.3. Simplifique las siguientes expresiones algebraicas.

1. $\sqrt[5]{27x^4y^5} = (27x^4y^5)^{1/5} = (27)^{1/5}x^{4/5}y$
2. $\dfrac{5^{3/4}5^{1/4}}{5^{1/2}5^{2/3}} = \dfrac{5^{(1+3)/4}}{5^{(1\cdot 3+2\cdot 2)/(2\cdot 3)}} = \dfrac{5^{4/4}}{5^{7/6}} = 5^{1-7/6} = 5^{-1/6} = \dfrac{1}{5^{1/6}}$.
3. $\dfrac{-2x^{1/2}y}{(x^{3/4}y)^2} = \dfrac{-2x^{1/2}y}{x^{6/4}y^2} = \dfrac{-2x^{1/2}y}{x^{3/2}y^2} = -2x^{1/2-3/2}y^{1-2} = -2x^{-1}y^{-1} = -\dfrac{2}{xy}$.
4. $2^{3/2} = (2^{1/2})^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$.
5. $(-8)^{2/3} = ((-8)^{1/3})^2 = (-2)^2 = 4$.
6. $16^{0.75} = 16^{3/4} = (16^{1/4})^3 = 2^3 = 8$.
7. $\sqrt[3]{-125x^3} = \sqrt[3]{(-5)^3 \cdot x^3} = \sqrt[3]{(-5)^3} \cdot \sqrt[3]{x^3} = -5x$.
8. $\sqrt[4]{\dfrac{x^8}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^8}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{x^{8/4}}{81^{1/4}} = \dfrac{x^2}{3}$.
9. $\sqrt[3]{250x^6y^{15}} = \sqrt[3]{250}\sqrt[3]{x^6}\sqrt[3]{y^{15}} = \sqrt[3]{2 \times 5^3}\sqrt[3]{x^6}\sqrt[3]{y^{15}} = 5\sqrt[3]{2}x^2y^5$.
10. $\sqrt{1 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \dfrac{3}{4}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$.

11 Radicales y exponentes racionales

11.2 Propiedades y simplificación de radicales

Consideramos que una expresión con radicales está en su forma más simple cuando:

1. No podemos remover factores del radicando.
2. No quedan fracciones en el radicando.
3. No aparecen símbolos de radical en el denominador.

4. El índice es el menor posible.

Ejemplo 11.2.1. Simplifica los siguientes radicales.

1. $\sqrt{75}$ no está en su forma más simple porque podemos remover el factor 25 del radicando:
$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}.$$

2. $a^2/\sqrt{5}$ no está en su forma más simple porque aparece un radical, $\sqrt{5}$, en el denominador. Para simplificarlo, multiplicamos el numerador y denominador por $\sqrt{5}$:
$$\frac{a^2}{\sqrt{5}} = \frac{a^2\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{a^2\sqrt{5}}{5}.$$

3. $\sqrt[3]{2/9}$ no está en su forma más simple porque el radicando es una fracción. Para simplificarlo, hallamos una fracción equivalente cuyo denominador sea una cubo perfecto:
$$\sqrt[3]{\frac{2}{9}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 3}{9 \cdot 3}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{3}.$$

4. $\sqrt[4]{243}$ no está en su forma más simple porque podemos remover factores del radicando. Para simplificarlo, hallamos la factorización prima de 243. Note que
$$243 = 3^5.$$
Entonces,
$$\sqrt[4]{243} = \sqrt[4]{3^5} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{3} = 3\sqrt[4]{3}.$$

5. $\sqrt[3]{3/x}$ no está en su forma más simple porque podemos el radicando es una fracción. Para simplificarlo, hallamos el múltiplo menor de x que sea un cubo perfecto. En este caso, estamos hablando de x^3. Note que ahora multiplicamos el numerador y denominador por x^2 (lo que le hace falta a x para convertirse en x^3) para obtener
$$\sqrt[3]{\frac{3}{x}} = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{x \cdot x^2}} = \frac{\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{3x^2}}{x}.$$

6. $\sqrt[3]{250x^6y^{15}}/\sqrt{12}$ no está en su forma más simple por dos razones. Primero, el denominador tiene un radical. Segundo, podemos remover factores el radicando en el radical del numerador. Primero eliminaremos el radical del denominador. Para esto, multiplique el numerador y el denominador por $\sqrt{12}$ para obtener
$$\frac{\sqrt[3]{250x^6y^{15}}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt[3]{250x^6y^{15}} \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{12}\sqrt{12}} = \frac{\sqrt[3]{250x^6y^{15}} \cdot \sqrt{12}}{12}$$

Ahora removeremos factores de ambos radicales en el numerador:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{250x^6y^{15}}}{\sqrt{12}} &= \frac{\sqrt[3]{250x^6y^{15}}\cdot\sqrt{12}}{12} \\
&= \frac{\sqrt[3]{2\cdot 5^3x^6y^{15}}\cdot\sqrt{2^2\cdot 3}}{12} \\
&= \frac{\sqrt[3]{2}\cdot 5^{3/3}\cdot x^{6/3}\cdot y^{15/3}\cdot 2^{2/2}\cdot\sqrt{3}}{12} \\
&= \frac{5\sqrt[3]{2}\cdot x^2y^5\cdot 2\sqrt{3}}{12} \\
&= \frac{10\sqrt[3]{2}\sqrt{3}\cdot x^2y^5}{12} \\
&= \frac{5\sqrt[3]{2}\sqrt{3}\cdot x^2y^5}{6}.
\end{aligned}$$

Acabamos esta sección recordando que no existe una regla de simplificación de radicales cuando el radicando es una suma o resta. En este caso, o sea, cuando nos encontramos con una expresión de la forma $\sqrt[n]{a\pm b}$, debemos efectuar primero la suma (o resta) y luego efectuar la redicación.

Ejemplo 11.2.2. Simplifique las siguientes expresiones:

1. $\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=8.$
2. $\displaystyle\sqrt{1+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{10}{9}}=\frac{\sqrt{10}}{3}.$
3. $\sqrt[3]{5x^3+3x^3}=\sqrt[3]{8x^3}=2x.$

11.3 Operaciones con radicales

Suma y resta

Para sumar o restar expresiones con radicales, tenemos que identificar y combinar radicales semejantes.

Definición 11.3.1. Dos radicales son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Por ejemplo, las expresiones $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$ no son semejantes, pues aunque tienen el mismo índice, no tienen el mismo radicando. Por lo tanto, $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ya esta en su forma más simple. Por otro lado, las expresiones $3\sqrt[5]{7}$ y $12\sqrt[5]{7}$ son semejantes. La suma está dada por

$$3\sqrt[5]{7}+12\sqrt[5]{7}=15\sqrt[5]{7}.$$

En general, si $\sqrt[n]{a}\in\mathbb{R}$, entonces

$$c\sqrt[n]{a}+d\sqrt[n]{a}=(c+d)\sqrt[n]{a}.$$

Ejemplo 11.3.2. Simplifique las siguientes expresiones:

1. $\sqrt{44}-\sqrt{11}=\sqrt{4\cdot 11}-\sqrt{11}=2\sqrt{11}-\sqrt{11}=\sqrt{11}$.

2. $3\sqrt{2}-2\sqrt{50}+2\sqrt{8}$

   Note que

$$\begin{aligned}
3\sqrt{2}-2\sqrt{50}+2\sqrt{8} &= 3\sqrt{2}-2\sqrt{2\cdot 25}+2\sqrt{4\cdot 2}\\
&= 3\sqrt{2}-2\cdot 5\sqrt{2}+2\cdot 2\sqrt{\cdot 2}\\
&= 3\sqrt{2}-10\sqrt{2}+4\sqrt{\cdot 2}\\
&= (3-10+4)\sqrt{2}\\
&= -3\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

3. $4\sqrt[3]{x^5}-2\sqrt[3]{x^8}$

   Note que

$$\begin{aligned}
4\sqrt[3]{x^5}-2\sqrt[3]{x^8} &= 4\sqrt[3]{x^3\cdot x^2}-2\sqrt[3]{x^6\cdot x^2}\\
&= 4x^{3/3}\sqrt[3]{x^2}-2x^{6/2}\sqrt[3]{x^2}\\
&= 4x\sqrt[3]{x^2}-2x^2\sqrt[3]{x^2}\\
&= (4x-2x^2)\sqrt[3]{x^2}.
\end{aligned}$$

Multiplicación y división de radicales

Propiedad 11.3.3. Suponga que $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}\in\mathbb{R}$, entonces

1. $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$,

2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ cuando $b\neq 0$.

También, si $\sqrt[m]{a}\in\mathbb{R}$, entonces

1. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{a}=a^{1/n}\cdot a^{1/m}=a^{(m+n)/(mn)}=\sqrt[mn]{a^{m+n}}$,

2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}}=\dfrac{a^{1/n}}{a^{1/m}}=a^{(m-n)/(mn)}=\sqrt[mn]{a^{m-n}}$ cuando $a\neq 0$.

Ejemplo 11.3.4. Simplifica las siguientes expresiones:

1. $\sqrt[3]{8x}\cdot\sqrt[3]{4x^2}=\sqrt[3]{(8x)(4x^2)}=\sqrt[3]{(8x^3)4}=2x\sqrt[3]{4}$.

2. $\dfrac{\sqrt[3]{54x^5}}{\sqrt[3]{2x}}=\sqrt[3]{\dfrac{54x^5}{2x}}=\sqrt[3]{27x^4}=\sqrt[3]{(27x^3)x}=3x\sqrt[3]{x}$.

3. $\sqrt{5}\div\sqrt[4]{5}=5^{1/2}\div 5^{1/4}=5^{1/2-1/4}=5^{1/4}=\sqrt[4]{5}$.

11.4 Racionalización

En el cápitulo 4 analizamos por primera vez el proceso de racionalización (aunque no los mencionamos explícitamente). Este proceso nos permite escribir formas del tipo

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

como expresiones donde el numerador o el denominador no tiene radicales. Para racionalizar el numerador o el denominador de expresiones de la forma

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}},$$

multiplicamos el numerador y el denominador de la expresion por aquel factor que nos permita obtener la raíz n-ésima de una n-ésima potencia, $\sqrt[n]{a^n}$, en el numerador o el denominador. En este cápitulo usaremos exponentes racionales o radicales para llevar a caba racionalización.

Ejemplo 11.4.1. Haga lo siguiente:

1. Racionaliza el denominador de la expresión $\sqrt[5]{\dfrac{3}{4^3}}$.

   Respuesta: Note que
   $$\sqrt[5]{\frac{3}{4^3}} = \frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{4^3}} = \frac{3^{1/5}}{4^{3/5}}.$$
   El denominador sería un número racional si 4 tuviera exponente 5/5. Ahora, note que
   $$4^{3/5} \cdot 4^{2/5} = 4^{5/5} = 4.$$
   Por lo tanto, multiplicamos el numerador y denominador por $4^{2/5}$
   $$\frac{3^{1/5} \cdot 4^{2/5}}{4^{3/5} \cdot 4^{2/5}} = \frac{(3 \cdot 4^2)^{1/5}}{4} = \frac{\sqrt[5]{3 \cdot 4^2}}{4} = \frac{\sqrt[5]{48}}{4}.$$

2. Racionaliza el denominador de la expresión $\dfrac{7}{\sqrt[3]{6}}$.

   Respuesta: Multiplique el numerador y denominador por $\sqrt[3]{6^2}$ (es el factor que convierte a $\sqrt[2]{6}$ en 6) para obtener:
   $$\begin{aligned} \frac{7}{\sqrt[3]{6}} &= \frac{7 \cdot \sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{6^2}} \\ &= \frac{7 \cdot \sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6^3}} \\ &= \frac{7\sqrt[3]{36}}{6}. \end{aligned}$$