Programa Inmersión, Verano 2024
Notas escritas por Dr. M

Notas del cursos. Basadas en los prontuarios de MATE 3001 y MATE 3171

Clase #6: lunes, 1 de julio de 2024.

5 Ecuaciones lineales y conceptos elementales de funciones

5.2 Ecuaciones y soluciones

Una ecuación matemática es una oración que nos indica la igualdad entre dos expresiones matemáticas.

Ejemplo 5.2.1. Algunos ejemplos de ecuaciones:

1. $x = 3$.
2. $x + 3 = 8$.
3. $3x + 3 = 5$.
4. $3(x + 2) = 3x + 6$.
5. $\sqrt{x + 2} = 8$.
6. $\dfrac{7}{x - 2} + \dfrac{1}{x^2 - 4} = 0$.

En una ecuación, a la variable o variables se le asignan valores que son elementos de un conjunto dado y se dice que la ecuación está definida sobre ese conjunto. Si no se especifica el conjunto, se supone que éste es el conjunto de los números reales. Los elementos del conjunto en el cual está definida la ecuación se llaman *valores permitidos*. Al sustituir en la ecuación los valores permitidos, la oración se hace cierta o falsa. Llamamos saluciones de la ecuación a los valores permitidos que hacen cierta la ecuación. El conjunto de todas las soluciones se llama conjunto solución de la ecuación y decimos que estos valores satisfacen la ecuación.

Ejemplo 5.2.2. Considere la ecuación $3x + 2 = 8$. Note que $x = 1$ no es solución, mientras $x = 2$ sí.

Resolución de ecuaciones lineales

Definición 5.2.3. Una ecuación lineal es aquella que se puede expresar en la forma $ax + b = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Ejemplo 5.2.4. Las siguientes expresiones son ecuaciones lineales:

1. $x - 3 = 0$.
2. $2x - 1 = 3$.
3. $x = 9$.
4. $3x + 7 = 13$.

Las siguientes expresiones no son ecuaciones lineales:

1. $x^2 = 0$.
2. $3x^2 - 1 = 0$.
3. $\sqrt{x} - 1 = 0$.
4. $\dfrac{1}{x+3} = 3$.

¿Cómo resolvemos las ecuaciones lineales?

Para hallar la solución de una ecuación lineal, transformamos la ecuación dada en ecuaciones equivalentes más simples hasta obtener una ecuación equivalente de la forma $x = c$. El conjunto solución es $\{c\}$.

Ejemplo 5.2.5. Halla el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

1. $4x = 17$.

   Solución: Multiplique por 1/4 en ambos lados de la ecuación para obtener

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(4x) &= \frac{1}{4}(17) \\ x &= \frac{17}{4}. \end{aligned}$$

2. $2x + 5 = 11$.

   Solución: Reste por 5 a ambos lados para obtener

$$\begin{aligned} (2x+5) - 5 &= 11 - 5 \\ 2x &= 6. \end{aligned}$$

   Ahora divida por 2 en ambos lados para obtener

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(2x) &= \frac{1}{2}(6) \\ x &= 3. \end{aligned}$$

3. $3(2x+5) = 3x+2$.

Solución: Note que tenemos la ecuación

$$6x + 15 = 3x + 2.$$

Reagrupe los términos con x a las izquierda y las constantes a la derecha para obtener

$$\begin{aligned} 6x - 3x &= 2 - 15 \\ 3x &= -13 \\ \frac{1}{3}(3x) &= \frac{1}{3}(-13) \\ x &= -\frac{13}{3}. \end{aligned}$$

4. $2(x+3) = 2x$.

Solución: Note que tenemos la ecuación

$$\begin{aligned} 2x + 6 &= 2x \\ 6 &= 0. \end{aligned}$$

Concluimos que la ecuación no tiene solución. En este caso decimos que el conjunto solución para esta ecuación es $\emptyset$.

5. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{5} = 2(x+2)$.

Solución: Note que

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} + \frac{2}{5} &= 2(x+2) \\ \frac{5x}{15} + \frac{3 \cdot 2}{15} &= 2x + 4 \\ \frac{5x+6}{15} &= 2x + 4 \\ 15\left(\frac{5x+6}{15}\right) &= 15(2x+4) \\ 5x + 6 &= 30x + 60 \\ 6 - 60 &= 30x - 5x \\ -54 &= 25x \\ \frac{1}{25}(-54) &= \frac{1}{25}(25x) \\ -\frac{54}{25} &= x. \end{aligned}$$

5.3 Aplicaciones de ecuaciones

En esta sección resolveremos problemas verbales sencillos mediante el uso de ecuaciones lineales.

Ejemplo 5.3.1. Algunos problemas.

1. Cinco más que el doble de un número n es 11. Halla ese número.

   Respuesta: La expresión "cinco más que el doble de un número n" se presenta como $2n+5$. La oración se transforma a

   $$2n+5=11.$$

   Ahora resolvemos la ecuación:

   $$\begin{aligned} 2n+5 &= 11 \\ (2n+5)-5 &= 11-5 \\ 2n &= 6 \\ \frac{1}{2}(2n) &= \frac{1}{2}(6) \\ n &= 3. \end{aligned}$$

2. Tres menos que cinco veces un número n es 17. Halle el número n.

   Respuesta: La expresión "tres menos que cinco veces un número n" se representa como $5n-3$. La oración se transforma en la ecuación

   $$5n-3=17.$$

   Ahora resolvemos la ecuación:

   $$\begin{aligned} 5n-3 &= 17 \\ (5n-3)+3 &= 17+3 \\ 5n &= 20 \\ \frac{1}{5}(5n) &= \frac{1}{5}(20) \\ n &= 4. \end{aligned}$$

3. Halla las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 52 cm, si su largo es cinco más que el doble del ancho.

   Respuesta: Sea a la dimensión del ancho y l la dimensión del largo. Recuerde que el perímetro de un trianglo es la suma de las dimensiones de todos los lados. Por lo tanto,

   $$P=2a+2l=52.$$

Ahora, recuerde que nos dicen que el largo del rectángulo es 5 veces más que el doble del ancho, o sea,

$$l = 2a + 5.$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} 2a + 2l &= 52 \\ 2a + 2(2a+5) &= 52 \\ 2a + 4a + 10 &= 52 \\ 6a = 52 - 10 & \\ 6a = 42 & \\ \frac{1}{6}(6a) = \frac{1}{6}(42) & \\ a = 7. & \end{aligned}$$

Por lo tanto, el ancho del rectángulo es de 7 cm. Para encontrar el largo, recuerde que

$$l = 2a + 5 = 2(7) + 5 = 14 + 5 = 19.$$

Por lo tanto, el largo del rectángulo es de 19 cm.

4. Halla las dimensiones de un rectángulo si su área tiene 42 cm^2 y uno de los lados mide 7 cm.

   Respuesta: Sabemos que uno de los lados mide 7, mientras el otro lado es desconocido. Llamemos al lado desconocido a. Sabemos que el área de un rectángulo está dada por la multiplicación de los lados. Entonces,

$$42 = \text{Área} = 7a.$$

   Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 7a &= 42 \\ \frac{1}{7}(7a) &= \frac{1}{7}(42) \\ a &= 6. \end{aligned}$$

   Por lo tanto, el lado desconocido a mide 6 cm.

5. En un grupo de monedas de 5 y 10 centavos, hay ocho monedas más de 5¢ que las que hay de 10¢. Si el total es un dólar, halla la cantidad monedas de cada tipo.

   Respuesta: Sea x la cantidad de monedas de 10¢. Sabemos que las monedas de 5¢ son ocho más que las monedas de 10¢, o sea, $x + 8$. Ahora, tenemos un total de un dólar, o sea tenemos 100 centavos. El valor que nos dan las monedas de 5¢ y de 10¢ es

$$\begin{array}{rl} \text{valor de las } x \text{ monedas de 10¢ es} & 10x\,¢ \\ \text{valor de las } x+8 \text{ monedas de 5¢ es} & 5(x+8)\,¢ \end{array}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}
10x+5(x+8) &= 100\\
10x+5x+40 &= 100\\
15x &= 100-40\\
15x &= 60\\
\frac{1}{15}(15x) &= \frac{1}{15}(60)\\
x &= 4.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos $x=4$ monedas de 10¢ y $x+8=4+8=12$ monedas de 5¢.

5.4 Funciones, dominio y campo de valores

Uno de los conceptos más útiles en matemáticas es el de correspondencia entre conjuntos, en particular el concepto de función. El concepto de correspondencia entre conjuntos lo encontramos frecuentemente en nuestra vida diaria. Por ejemplo, a cada carta le corresponde un franqueo que depende de su peso, a cada salón de clases le corresponde un número de sillas, a cada familia le corresponde un apellido, a cada rectángulo le corresponde un perímetro, a cada persona le corresponde su peso en kilogramos.

En matemáticas usamos una notación especial para representar las correspondencias entre conjuntos. Usamos la letra f, para representar la correspondencia entre los dos conjuntos y el símbolo $f(x)$ para representar el elemento que asignamos al elemento x del primer conjunto; decimos que $f(x)$ es la imagen de x en la correspondencia f.

Ejemplo 5.4.1. Sean $A=\{1,2,3,4\}$ y $B=\{0,2,4,6,8,10\}$. Escoja la correspondencia f que asigna a cada elemento de A el doble del elemento.

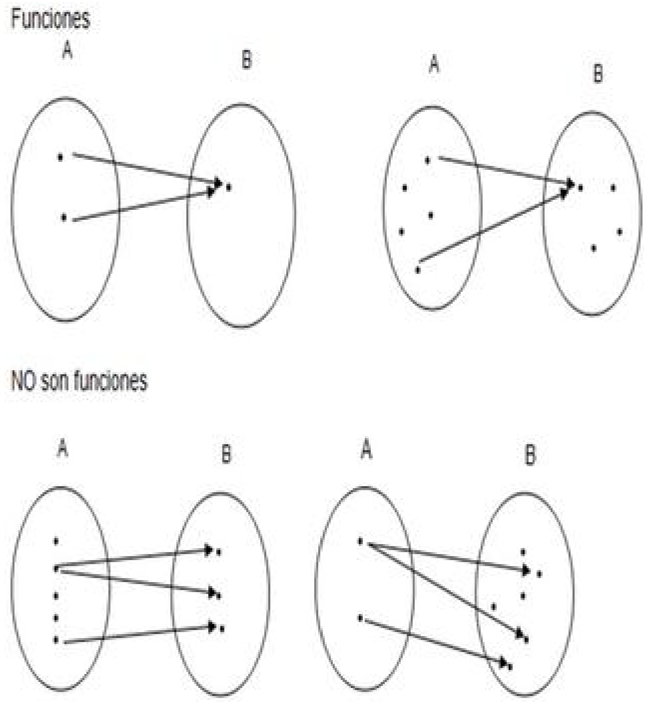
$$\begin{aligned}
f(1) &= 2(1)=2\\
f(2) &= 2(2)=4\\
f(3) &= 2(3)=6\\
f(4) &= 2(4)=8.
\end{aligned}$$

En este caso escribimos $f(x)=2x$.

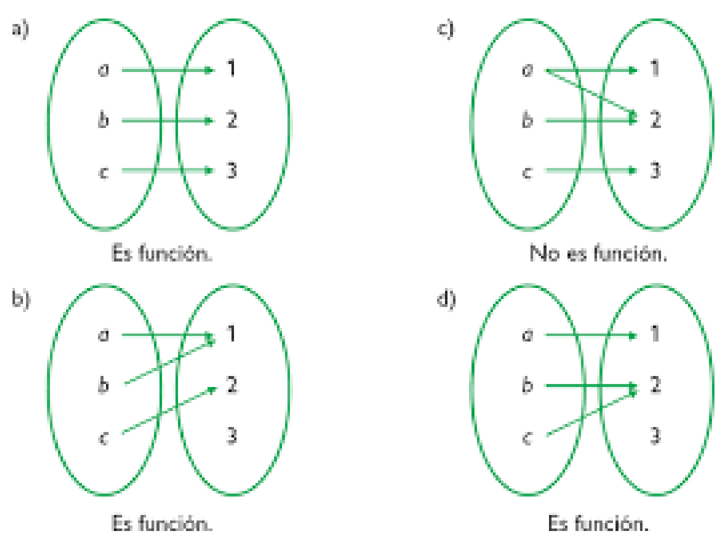
Si la correspondencia f asigna al elemento $a\in A$ el elemento $b\in B$, decimos que $f(a)=b$. El conjunto de los elementos $a\in A$ que tienen imagen en el conjunto B se llama *dominio* de correspondencia y se representa cono la letra D. El conjunto de los elementos de B que son imágenes de los elementos de A se llama campo de valores de la correspondencia y la representaremos por CV.

Definición 5.4.2. Una función es una correspondencia entre dos conjuntos que asigna a cada elemento del dominio una y solamente una imagen del campo de valores.

Ejemplo 5.4.3. A continuación, algunos ejemplos gráficos de funciones vs no funciones:



Ejemplo 5.4.4. Otros ejemplos gráficos de funciones vs no funciones:



Ejemplo 5.4.5. Sea $A = \mathbb{N}$ y $B = \mathbb{R}$. Defina f como la correspondencia $f : A \to B$ que asigna a cada entero positivo uno más que el doble del número. Entonces, si $x \in \mathbb{N}$, entonces $f(x) = 2x + 1$. El dominio de f es el conjunto de todos los números

naturales. Ahora, ¿cuál será el conjunto CV? Bueno, hallemos algunos valores:

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(1)+1=3 \\ f(2) &= 2(2)+1=5 \\ f(3) &= 2(3)+1=7. \end{aligned}$$

Observe que todos los números en el campo de valores son enteros impares (esto se puede ver ya que si n es entero, entonces $2n+1$ es impar). Ahora bien, el más pequeño de ellos es el 3, por lo tanto, en este caso,

$$CV = \{3,5,7,9,11,\cdots\} = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ es impar y } n \neq 3\}.$$

Por cierto, encuentre el valor de n tal que $f(n) = 27$. Bueno, tenemos

$$\begin{aligned} f(n) &= 27 \\ 2n+1 &= 27 \\ 2n &= 27-1 \\ n &= \frac{26}{3} \\ n &= 13. \end{aligned}$$

Claramente, $f(13) = 2(13)+1 = 26+1 = 27$.

Ejemplo 5.4.6. Considere la función g definida del conjunto de los números reales al conjunto de los números reales tal que g asigna a cada real distinto de cero su reciproco. Esto es, si $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, entonces $f(x) = 1/x$. El dominio de esta función es

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 0\}.$$

Evalúa cada uno de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} g(1) &= \frac{1}{1} = 1 \\ g(\sqrt{2}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ g\left(1+\frac{1}{3}\right) &= g\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Ahora, ¿cuál es el campo de valores CV para esta función? Bueno, para contestar esta pregunta, necesitamos ver cuando un número es el reciproco de otro. Ahora bien, nuestra función está dada por $g(x) = 1/x$ y el númerador de $1/x$ es 1, por lo tanto, $1/x$ nunca es cero. Por lo tanto, $0 \notin CV$. Ahora bien, sea y cualquier número real distinto de cero. Note que $1/y \in \mathbb{R}$ y

$$g\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{1/y} = y,$$

por lo tanto, si $y \neq 0$ es real, entonces $y \in CV$. Concluimos que

$$CV = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 0\}.$$