**Programa Inmersión, Verano 2024**
Notas escritas por Dr. M

Notas del cursos. Basadas en los prontuarios de MATE 3001 y MATE 3171

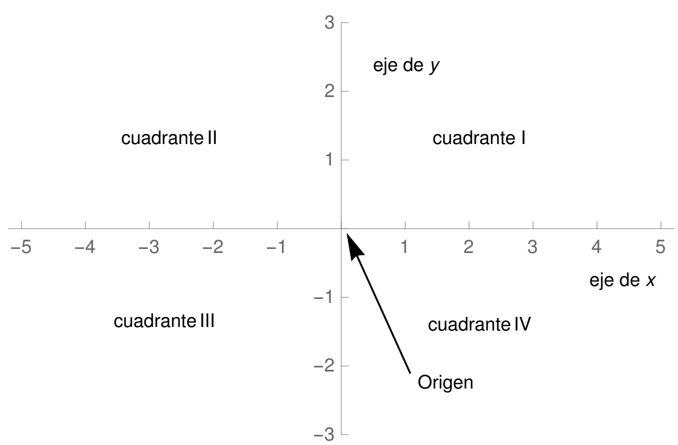
**Clase #7:** martes, 2 de julio de 2024.

## 5.5 Sistema de coordenadas cartesianas

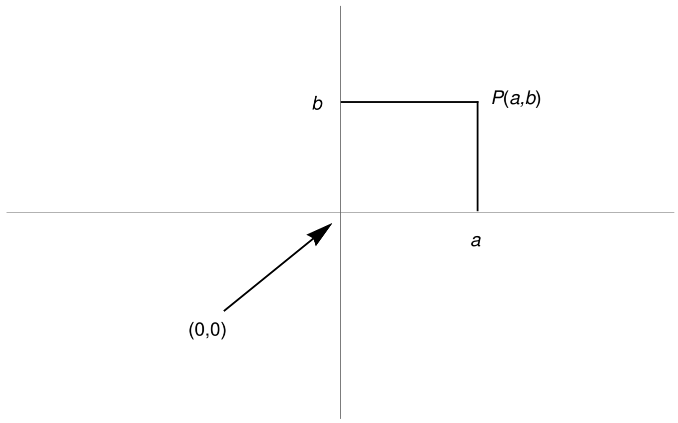
Una de las correspondencias más importantes en matemáticas es la que asigna a cada punto en el plano un par ordenado de números reales y a cada par ordenado de números reales un punto en el plano.

Consideremos una recta numérica que llamaremos el eje de $x$ (eje de las abscisas). Tracemos una recta númerica perpendicular a aquélla que llamaremos eje de $y$ (eje de las ordenadas). Estas dos rectas se intersecan en un punto que llamaremos origen y que asociamos con el par ordenado $(0, 0)$. La porción del eje de $y$ que queda sobre el eje de $x$ se asocia con los números reales positivos y la que queda debajo del eje de $x$ se asocia con los números reales negativos. Las rectas separan al plano en cuatro regiones que llamaremos cuadrantes y que numeramos empezando en la parte positiva del eje de $x$, moviéndose en sentido contrario a las manesillas del reloj: Cuadrante I, Cuadrante II, Cuadrante III y Cuadrante IV.

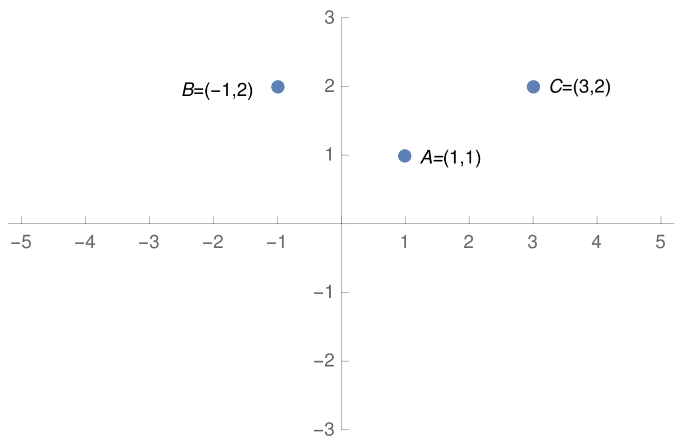
Unas de las primeras personas en utilizar este sistema fue René Descartes, de ahí surge el nombre de coordenadas cartesianas.




Para asignar a cada par ordenado $(a, b)$ un punto en el plano cartesiano, hacemos lo siguiente: marcamos en el eje de $x$ el punto que asociamos con la primera coordenada, $a$, del par ordenado y trazamos una recta perpendicular al eje de $x$ que pasa por ese punto $a$. Luego marcamos el eje de $y$ el punto que asociamos con la segunda coordenada, $b$, del par ordenado y trazamos una recta perpendicular al eje de $y$ que pase por ese punto $b$. La intersección de estas dos rectas determina un punto $P$ en el plano que asociamos con el par ordenado $(a, b)$. Decimos entonces que las coordenadas de $P$ son $(a, b)$.




**Ejemplo 5.5.1.** Sea $A = (1, 1)$, $B = (-1, 2)$ y $C = (3, 2)$. Entonces,




## 5.6 Conceptos básicos de gráficas

En la sección anterior aprendimos a asociar puntos en el plano con pares ordenados y viceversa. Como una función determina un conjunto de pares ordenados, i.e.

$$\{(x, f(x)) \,|\, x \in \mathrm{dom}(f)\},$$

entonces podemos representarla en el plano. El conjunto de puntos en el plano asociados con los pares ordenados de una función se llama la gráfica de la función.

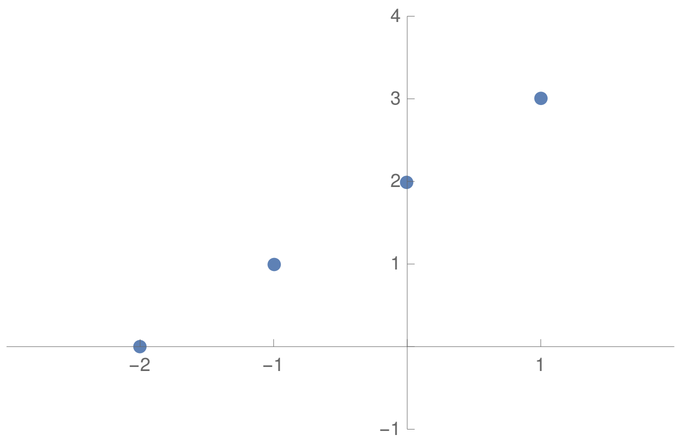
**Ejemplo 5.6.1.** Dibujemos la gráfica de la función $f(x) = x + 2$ si su dominio es

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, -2 \leq x \leq 1\}.$$

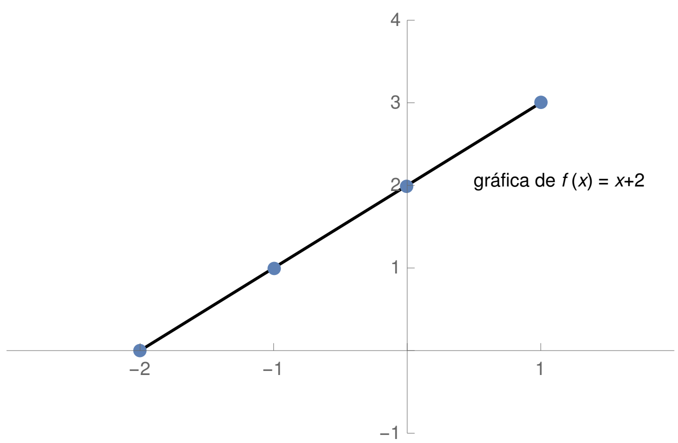
*Respuesta:* Primero buscaremos varios puntos de la gráfica. Note que

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| -2 | 0 |
| -1 | 1 |
| 0 | 2 |
| 1 | 3 |

Ahora grafiquemos estos puntos en el plano.



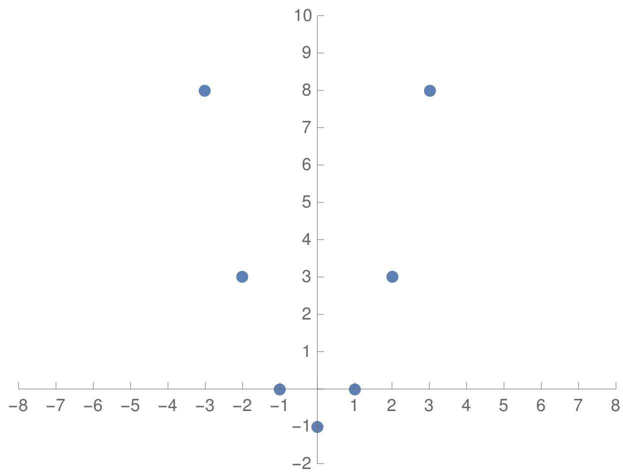

Finalmente, tomemos ventaja de que sabemos que $f(x) = x + 2$ es una recta. Para encontrar la gráfica en su totalidad, conectamos los puntos para obtener:



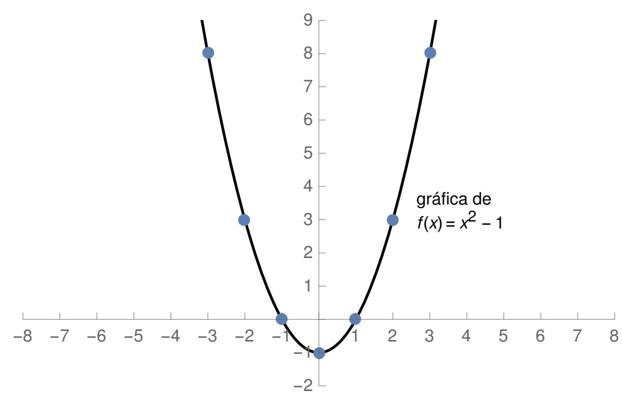

**Ejemplo 5.6.2.** Tratemos ahora de dibujar la gráfica de $f(x) = x^2 - 1$ si su dominio es $\mathbb{R}$. Para hacer esto, obtenemos varios puntos en el plano que corresponden a la gráfica de la función. Digamos que encontramos los valores de $f(x)$ para $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| -3 | 8 |
| -2 | 3 |
| -1 | 0 |
| 0 | -1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 3 |
| 3 | 8 |

Ahora grafiquemos estos puntos en el plano.



Finalmente, sabemos que $f(x) = x^2 - 1$ es cuadrática, por lo tanto, debemos tener algo que parezca una parábola. Para encontrar la gráfica, conectamos los puntos para obtener (tratando de dibujar una parábola en el proceso):



# 7 Polinomios

## 7.1 Conceptos básicos

Una expresión algebraica es una combinación de constantes y variables que incluye operaciones de suma, resta, multiplicación y división, además de la exponenciación y radicación

**Ejemplo 7.1.1.** Algunos ejemplos de expresiones algebraicas.

1. $3x^2 + \sqrt{5}x + \dfrac{x}{2}$

2. $4xy^2 + \dfrac{5x^2}{z}$

3. $\dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{3x + 2}$.

Aquella expresión algebraica en la que aparece solamente la multiplicación o la división, o ambas, se llama término. Por ejemplo, los siguientes son términos:

$$3x^2, \quad \frac{x^4}{z}, \quad 8, \quad 5(x + y).$$

**Nota:** La expresión $5(x + y)$ es un término formado por la constante 5 multiplicada por el número $x + y$. La expresión $5x + 5y$ es la suma de dos términos.

**Definición 7.1.2.** Dos términos en una o más variables son semejantes si tienen la mismas variables elevadas al mismo exponente.

**Ejemplo 7.1.3.** Algunos ejemplos.

1. $3x^3, 7x^3, -9x^3$ son semejantes.

2. $4xy, 11xy, xy$ son semejantes.

3. $3x^3, 5^2$ no son semejantes.

**Definición 7.1.4.** Un polinomio es aquella expresión algebraica en la cual los exponentes de las variables son números enteros no negativos.

**Ejemplo 7.1.5.** Algunos ejemplos.

1. $3x^3$ es un polinomio (cuando es un solo término, también lo llamamos monomio).

2. $2xy^3 + 3x^2 - xy + 3x + 1$ es un polinomio.

3. $x^2 + \dfrac{1}{3}x + 1$ es un polinomio.

4. $\sqrt{x} + 3x + 1$ NO es un polinomio.

5. $\dfrac{x+1}{x^2+3}$ NO es un polinomio.

En esta clase trabajaremos con polinomios en una variable, la cual normalmente llamaremos $x$. Un polinomio en la variable $x$ tiene la forma general

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

donde $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$ es no negativo. Los reales $a_0, a_1, \cdots, a_n$ se llaman *coeficientes*. Si $a_n \neq 0$, entonces decimos que el grado de $p(x)$ es $n$. En este curso, utilizaremos la notación $\deg(p(x))$ para referirnos al grado del polinomio.

**Ejemplo 7.1.6.** Algunos ejemplos:

1. El polinomio $4x^3 + 8x^2 + 2x + 3$ tiene grado 3 y sus coeficientes son $a_3 = 4$, $a_2 = 8$, $a_1 = 2$ y $a_0 = 3$.
2. El polinomio $2x^7 + 3x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ tiene grado 7 y sus coeficientes son $a_7 = 2$, $a_6 = a_5 = a_4 = a_3 = 0$, $a_2 = 3$, $a_1 = 1/2$ y $a_0 = 1$.
3. $2\sqrt{3}$ es un polinomio de grado 0 con coeficiente $a_0 = 2\sqrt{3}$.
4. 0 es un polinomio con coeficiente constante $a_0 = 0$. No le asignamos grado.

**Criterio de igualdad de polinomios**

**Definición 7.1.7.** Si $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios del mismo grado, entonces $P(x)$ y $Q(x)$ son iguales si y solo si los coeficientes de los términos semejantes son iguales.

**Ejemplo 7.1.8.** Si $p(x) = 4x^3 - 5x^2 + (c+3)x - 5$ y $q(x) = ax^3 + (b+3)x^2 + 7x + (2d+1)$, ¿para qué valores de $a, b, c, d$ es $p(x) = q(x)$?

*Respuesta:* Note que $p(x) = q(x)$ si y solo si sus coeficientes son iguales. Entonces, queremos

$$\begin{aligned} a &= 4 \\ b+3 &= -5 \\ c+3 &= 7 \\ 2d+1 &= -5. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a = 4$, $b = -8$, $c = 4$ y $d = -3$.

## 7.2 Suma y resta de polinomios

Para sumar polinomios, reagrupamos los términos semejantes usando las propiedades conmutativa y asociativa, y luego utilizamos la propiedad distributiva para combinar los coeficientes de los términos semejantes.

**Ejemplo 7.2.1.** Algunos ejemplos.

1. Sume $2x^2 + 5$ y $3x^2 - 2x + 1$.

   *Respuesta:* Note que $(2x^2+5)+(3x^2-2x+1) = (2x^2+3x^2)+(-2x)+(5+1) = 5x^2 - 2x + 6$.

2. Sume $x^4 + x^3 - 3x^2 + 5$ y $x^2 - 4x + 8$.

   *Respuesta:* Note que

$$\begin{aligned}(x^4 + x^3 - 3x^2 + 5) + (x^2 - 4x + 8) &= x^4 + x^3 + (-3x^2 + x^2) + (-4x) + (5 + 8)\\ &= x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 13.\end{aligned}$$

3. Sume $4x^5 + 3x^2 + 4$ con $x^4 + x^2 + x - 3$

   *Respuesta:* Note que

$$\begin{array}{rrrrrr} & 4x^5 & & +3x^2 & & +4 \\ + & & x^4 + & x^2 & +x & -3 \\ \hline & 4x^5 & +x^4 & +4x^2 & +x & +1 \end{array}$$

Note que la resta de dos polinomios se puede reducir a la suma de polinomios, pues si nos interesar restar $p(x) - q(x)$, entonces es lo mismo que efectúar $p(x) + (-q(x))$.

**Ejemplo 7.2.2.** Reste $2x^2 + 5$ y $3x^2 - 2x + 1$. *Respuesta:* Note que

$$\begin{aligned}(2x^2 + 5) - (3x^2 - 2x + 1) &= (2x^2 + 5) + (-3x^2 + 2x - 1)\\ &= (2x^2 - 3x^2) + (2x) + (5 - 1)\\ &= -x^2 + 2x + 4.\end{aligned}$$

## 7.3 Multiplicación de polinomios

La multiplicación de polinomios se reduce a aplicar la propiedad distributiva y efectuar varias multiplicaciones de monomios por monomios. Empecemos con el caso más sencillo, el cual es la multiplicación de un monomio por un polinomio. En este caso, debemos recordar la regla de exponentes $(ax^n)(bx^m) = abx^{n+m}$.

**Ejemplo 7.3.1.** Algunos ejemplos:

1. $3x(2x^2 + 5x + 8) = (3x)(2x^2) + (3x)(5x) + (3x)(8) = 6x^3 + 15x^2 + 24x$.

2. $2x^2(4x^2 + 2x + 1) = (2x^2)(4x^2) + (2x^2)(2x) + (2x^2)(1) = 8x^4 + 4x^3 + 2x^2$.

Para hacer multiplicaciones de polinomios, aplicamos la ley distributiva tantas veces como requiera. Esto es, multiplicamos cada término del primer factor por todos los términos del segundo factor y combinamos los términos semejantes.

**Ejemplo 7.3.2.** Algunos ejemplos.

1. Multiplique $x+2$ por $x^2+3x+1$.

   *Respuesta:* Note que

$$\begin{aligned}(x+2)(x^2+3x+1) &= x(x^2+3x+1)+2(x^2+3x+1)\\ &= (x^3+3x^2+x)+(2x^2+6x+2)\\ &= x^3+5x^2+7x+2.\end{aligned}$$

2. Multiplique $x^2+x+2$ por $x^2+3x+1$.

   *Respuesta:* Note que

$$\begin{aligned}(x^2+x+2)(x^2+3x+1) &= x^2(x^2+3x+1)+x(x^2+3x+1)+2(x^2+3x+1)\\ &= (x^4+3x^3+x^2)+(x^3+3x^2+x)+(2x^2+6x+2)\\ &= x^4+4x^3+6x^2+7x+2.\end{aligned}$$

**Reglas para multiplicar un polinomio por otro.**

1. Aplica la ley distributiva cuantas veces sea necesario.
2. Efectúa las multiplicaciones de monomios por monomios.
3. Combina los términos semejantes.

## 7.4 Productos notables

En esta sección te enseñaremos a reconocer unos productos que, porque ocurren con mucha frecuencia en ciencias y matemáticas, demuestran la conveniencia de efectuar la multiplicación por inspección. A continuación presentaremos cada uno de los casos.

**El cuadrado de un binomio**

Note que

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a(a+b)+b(a+b)\\ &= a^2+ab+ba+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2.\end{aligned}$$

También,

$$(a-b)^2=(a+(-b))^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

**Ejemplo 7.4.1.** Algunos ejemplos.

1. $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2(3 \cdot 2x) + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$.
2. $(4x+1)^2 = (4x)^2 + 2(4x) + 1 = 16x^2 + 8x + 1$.
3. $(x^2 - 2y)^2 = (x^2)^2 - 2(x^2 \cdot 2y) + (2y)^2 = x^4 - 4x^2y + 4y^2$.

**El producto de la suma y la diferencia de dos términos**

Note que

$$\begin{aligned} (a+b)(a-b) &= a(a-b) + b(a-b) \\ &= a^2 - ab + ba - b^2 \\ &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

**Ejemplo 7.4.2.** Algunos ejemplos.

1. $(x^2+y)(x^2-y) = x^4 - y^2$.
2. $(3x+x^2)(3x-x^2) = 9x^2 - x^4$.

**El producto de un binomio y un trinomio relacionados**

El producto de un binomio y un trinomio que están relacionados en la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (a+b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 + b^3 \\ (a-b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 - b^3. \end{aligned}$$

**Ejemplo 7.4.3.** Algunos ejemplos:

1. $(2+y)(4-2y+y^2) = 2^3 + y^3 = 8 + y^3$.
2. $(5-2y)(25+10y+4y^2) = 5^3 - (2y)^3 = 125 - 8y^3$.
3. $(a-3x)(a^2+3ax+9x^2) = a^3 - (3x)^3 = a^3 - 27x^3$.
4. $(3+a)(9-3a+a^2) = 3^3 + a^3 = 27 + a^3$.

## 7.5 División de polinomios

Si $p(x)$ y $t(x)$ son polinomios de grados $n$ y $m$ (resp.) con $n \geq m$, entonces dividir $p(x)$ entre $t(x)$ significa hallar un polinomio $q(x)$ y un residui $r(x)$ tal que

$$p(x) = q(x)t(x) + r(x),$$

donde $r(x) = 0$ o el grado de $\deg(r(x)) < m = \deg(t(x))$.

Antes de empezar la división escribimos el dividendo y el divisor en orden descendente de exponentes de la variable. El método de división de polinomios es parecido al método de división de números en artimética. Usamos un ejemplo para explicar el método de división de polinomios una vez que éstos se han escrito en orden descendente de exponentes de la variable $x$.

**Ejemplo 7.5.1.** Algunos ejemplos.

1. Divide $2x - 5x^2 + 6x^3 - 5$ entre $2x + 1$.

   *Respuesta:* Note que

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & 3x^2 & -4x & +3 \\ \cline{2-5}
2x+1 \big) & 6x^3 & -5x^2 & +2x & -5 \\
 & -6x^3 & -3x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -8x^2 & +2x & \\
 & & 8x^2 & +4x & \\ \cline{3-4}
 & & & 6x & -5 \\
 & & & -6x & -3 \\ \cline{4-5}
 & & & & -8
\end{array}
$$

   Como $-8$ tiene grado 0, el cual es menor que 1 (el grado de $2x + 1$), entonces terminamos. Por lo tanto, el

$$
\begin{array}{rc}
\text{el cociente es:} & 3x^2 - 4x + 3 \\
\text{el residuo es:} & -8.
\end{array}
$$

2. Divide $6x^5 - 3x^4 + x^3 + 7x^2 - 2x + 6$ entre $3x^2 + 2$.

   *Respuesta:* Note que

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 2x^3 & -x^2 & -x & +3 \\ \cline{2-7}
3x^2+2 \big) & 6x^5 & -3x^4 & +x^3 & +7x^2 & -2x & +6 \\
 & -6x^5 & & -4x^3 & & & \\ \cline{2-4}
 & & -3x^4 & -3x^3 & +7x^2 & & \\
 & & 3x^4 & & +2x^2 & & \\ \cline{3-5}
 & & & -3x^3 & +9x^2 & -2x & \\
 & & & 3x^3 & & +2x & \\ \cline{4-6}
 & & & & 9x^2 & & +6 \\
 & & & & -9x^2 & & -6 \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 0
\end{array}
$$

   Como obtuvimos residuio 0, entonces terminamos. Por lo tanto, el

$$
\begin{array}{rc}
\text{el cociente es:} & 2x^3 - x^2 - x + 3 \\
\text{el residuo es:} & 0.
\end{array}
$$

3. Divide $5x^4 - 2x^2 + 8x - 3$ entre $x - 2$.

   *Respuesta:* Note que

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & 5x^3 & +10x^2 & +18x & +44 \\
\cline{2-6}
x-2\big) & 5x^4 & & -2x^2 & +8x & -3 \\
 & -5x^4 & +10x^3 & & & \\
\cline{2-3}
 & & 10x^3 & -2x^2 & & \\
 & & -10x^3 & +20x^2 & & \\
\cline{3-4}
 & & & 18x^2 & +8x & \\
 & & & -18x^2 & +36x & \\
\cline{4-5}
 & & & & 44x & -3 \\
 & & & & -44x & +88 \\
\cline{5-6}
 & & & & & 85
\end{array}
$$

   Como 85 tiene grado 0, el cual es menor que 1 (el grado de $x - 2$), entonces terminamos. Por lo tanto, el

$$
\begin{array}{rc}
\text{el cociente es:} & 5x^3 + 10x^2 + 18x + 44 \\
\text{el residuo es:} & 85.
\end{array}
$$

4. Divide $5x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 6$ entre $5x - 3$.

   *Respuesta:* Note que

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & x^3 & & +\frac{7}{5}x & +\frac{11}{25} \\
\cline{2-6}
5x-3\big) & 5x^4 & -3x^3 & +7x^2 & -2x & +6 \\
 & -5x^4 & +3x^3 & & & \\
\cline{2-3}
 & & & 7x^2 & -2x & \\
 & & & -7x^2 & +\frac{21}{5}x & \\
\cline{4-5}
 & & & & \frac{11}{5}x & +6 \\
 & & & & -\frac{11}{5}x & +\frac{33}{25} \\
\cline{5-6}
 & & & & & \frac{183}{25}
\end{array}
$$

   Como $183/25$ tiene grado 0, el cual es menor que 1 (el grado de $5x-3$), entonces terminamos. Por lo tanto, el

$$
\begin{array}{rc}
\text{el cociente es:} & x^3 + \frac{7}{5}x + \frac{11}{25} \\
\text{el residuo es:} & \frac{183}{25}.
\end{array}
$$

5. Divide $-3x^3 + 2x^2 - 2x + 3 + 2x^4$ entre $x^2 + x - 2$.

*Respuesta:* Note que

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & & & 2x^2 & -5x & +11 \\
\hline
x^2 + x - 2 & 2x^4 & -3x^3 & +2x^2 & -2x & +3 \\
 & -2x^4 & -2x^3 & +4x^2 & & \\
\cline{2-4}
 & & -5x^3 & +6x^2 & -2x & \\
 & & 5x^3 & +5x^2 & -10x & \\
\cline{3-5}
 & & & 11x^2 & -12x & +3 \\
 & & & -11x^2 & -11x & +22 \\
\cline{4-6}
 & & & & -23x & +25
\end{array}
$$

Como $-23x + 25$ tiene grado 1, el cual es menor que 2 (el grado de $x^2 + x - 2$), entonces terminamos. Por lo tanto, el

$$
\begin{array}{rl}
\text{el cociente es:} & 2x^2 - 5x + 11 \\
\text{el residuo es:} & -23x + 25.
\end{array}
$$