Programa Inmersión, Verano 2023
Notas escritas por Dr. M

Notas del cursos. Basadas en los prontuarios de MATE 3001 y MATE 3171

Clase #8: viernes, 14 de julio de 2023.

8 Factorización

Conceptos básicos

Hasta ahora hemos estudiado las cuatro operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división de polinomios. En particular, analizamos métodos especiales para hallar el producto de dos o más polinomios de grado menor o igual que el del polinomio dado. En esta sección estudiaremos el proceso inverso: expresar un polinomio como el producto de dos o más polinomios de grado menor o igual que el del polinomio dado. A este proceso se le da el nombre de *factorización de polinomios*. Este concepto no es nuevo. Expusimos un tema análogo a éste al estudiar al estudiar la factorización de números naturales.

Si $p(x)$ es un polinomio y se verifica que $p(x) = q(x) \cdot d(x)$, siendo $q(x)$ y $d(x)$ también polinomios, entonces decimos que $q(x)$ y $d(x)$ son factores o divisores de $p(x)$. El grado de $p(x)$ es igual a la suma de los grados de $q(x)$ y $d(x)$.

Ejemplo 8.0.1. Algunos ejemplos.

1. $x^2 + 4x = x(x + 4)$.
2. $4x^2 - t^2 = (2x + t)(2x - t)$.
3. $x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$.

Definición 8.0.2. Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Decimos que $p(x)$ es un polinomio primo o irreducible en el conjunto de los polinomios con coeficientes enteros si los únicos polinomios con coeficientes enteros que dividen a $p(x)$ son $\pm p(x)$ y ± 1.

Ejemplo 8.0.3. Algunos ejemplos.

1. Los polinomios de la forma $ax + b$ son irreducibles si a y b son enteros relativamente primos.
2. $x + 4$ es un factor irreducible de $x^2 + 4x$ ya que $x^2 + 4x = x(x + 4)$ y $x + 4$ no tiene otros factores.

3. El polinomio $2x^3 + 5x^2$ se puede representar como

$$2x^3 + 5x^2 = x(2x^2 + 5x).$$

El factor $2x^2+5x$ no es factor irreducible de $2x^3+5x^2$ ya que tiene otros factores. Esto es,

$$2x^2 + 5x = x(2x + 5).$$

Tanto x como $2x + 5$ son factores irreducibles de $2x^3 + 5x^2$. Más aún,

$$2x^3 + 5x^2 = x \cdot x \cdot (2x + 5).$$

8.1 Factor común mayor

El producto notable más sencillo es una aplicación directa de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Por lo tanto, una expresión de la forma $ab + ac$ se puede escribir como $a(b + c)$.

Ejemplo 8.1.1. Algunos ejemplos.

1. Escribe $7a + 14a^2$ como un producto de polinomios irreducibles en el conjunto de los polinomios con coeficientes enteros.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} 7a + 14a^2 &= a(7 + 14a) \\ &= 7a(1 + 2a). \end{aligned}$$

2. Escribe $x^3 + 3x^2$ como un producto de polinomios irreducibles en el conjunto de los polinomios con coeficientes enteros.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 &= x^2(x + 3) \\ &= x \cdot x \cdot (x + 3). \end{aligned}$$

Podemos conseguir los factores irreducibles si buscamos el factor común mayor a todos los términos antes de aplicar la ley de distribución. En algunas ocaciones el factor común mayor no es tan obvio de conseguir y es necesario agrupar los términos en una fórmula conveniente.

Ejemplo 8.1.2. Algunos ejemplos.

1. $(x + 2)y + x + 2$.

   Respuesta: Note que $x + 2$ es común, por lo tanto,

$$\begin{aligned} (x + 2)y + x + 2 &= (x + 2)y + (x + 2) \\ &= (x + 2)(y + 1). \end{aligned}$$

2. $ax + ay + bx + by$.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} ax + ay + bx + by &= a(x+y) + b(x+y) \\ &= (a+b)(x+y). \end{aligned}$$

3. $x^2 + 6x + 8$.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 8 &= (x^2 + 2x) + (4x + 8) \\ &= x(x+2) + 4(x+2) \\ &= x(x+2)(x+4). \end{aligned}$$

4. $14x^2y - 35xy^2 - 49x^2y^2$.

   Respuesta: Note que

$$14x^2y - 35xy^2 - 49x^2y^2 = 7xy(2x - 5y - 7xy)$$

5. $2x - 10 + xy - 5y$.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} 2x - 10 + xy - 5y &= 2(x-5) + y(x-5) \\ &= (x-5)(y+2). \end{aligned}$$

8.2 Factorización de trinomios

Entre los productos notables considerados en el capítulo anterior se encontraba el caso del cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

Podemos reconocer el trinomio cuadrado perfecto porque dos de sus términos son cuadrados de alguna expresión y el otro, excepto quizás por su signo, es el doble del producto de las raíces cuadradas de estos dos términos.

Ejemplo 8.2.1. Algunos ejemplos.

1. $x^2 + 8x + 16$.

   Respuesta: Note que $16 = 4^2$ y $8 = 2(4)$. Por lo tanto,

$$x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2.$$

2. $9x^2 - 30x + 25$.

   Respuesta: Note que $9x^2 = (3x)^2$, $25 = 5^2$ y $30x = 2(3x \cdot 5)$. Por lo tanto,

   $$9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2.$$

3. $16x^2 + 24x + 9$.

   Respuesta: Note que $16x^2 = (4x)^2$, $9 = 3^2$ y $24x = 2(4x \cdot 3)$. Por lo tanto,

   $$16x^2 + 24x + 9 = (4x + 3)^2.$$

4. $2x^2 + 16x + 32$.

   Respuesta: Note que $2x^2+16x+32 = 2(x^2+8x+16)$. Por el ejercicio 1 sabemos que $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$. Por lo tanto,

   $$2x^2 + 16x + 32 = 2(x + 4)^2.$$

Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.

Si x^2+bx+c tiene factores irreducibles en el conjunto de los polinomios con coeficientes enteros es porque existen números enteros p y q tal que

$$x^2 + bx + c = (x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + pq.$$

Por la igualdad de polinomios, se sigue que

$$\begin{aligned} p + q &= b \\ pq &= c. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para factorizar (si es que es posible) un polinomio de la forma x^2+bx+c sobre los polinomios con coeficientes enteros, debemos encontrar un par de enteros p y q tal que $p + q = b$ y $pq = c$.

Ejemplo 8.2.2. Algunos ejemplos.

1. Factorice el polinomio $x^2 + 5x + 6$.

   Respuesta: Note que $6 = 2 \cdot 3$ y $5 = 2 + 3$. Por lo tanto,

   $$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3).$$

2. Factorice el polinomio $x^2 + 2x - 48$.

   Respuesta: Note que $-48 = (-6) \cdot 8$ y $2 = -6 + 8$. Por lo tanto,

   $$x^2 + 2x - 48 = (x - 2)(x + 8).$$

3. Factorice el polinomio $x^2 - 4x + 3$.

   Respuesta: Note que $3 = (-1)(-3)$ y $-4 = -1 + (-3)$. Por lo tanto,

   $$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3).$$

4. Factorice el polinomio $x^2 + 3x + 1$.

   Respuesta: Note que tenemos que hallar enteros p y q tal que $pq = 1$ y $p+q = 3$. Ahora, no existen enteros p y q que satisfagan estas dos ecuaciones al mismo tiempo. Por lo tanto, decimos que $x^2 + 3x + 1$ es irreducible sobre el conjunto de los enteros.

   Nota: El hecho de que $x^2 + 3x + 1$ sea irreducible sobre los enteros no significa que sea irreducible sobre los reales. Se puede verificar (con algo de paciencia) que

   $$x^2 + 3x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right)\right)\left(x + \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right)\right).$$

   Por lo tanto, $x^2 + 3x + 1$ es <u>*reducible*</u> sobre los reales.

<u>Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.</u>

En el caso de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, donde a, b, c son enteros tal que $\mathrm{DCM}(a, b, c) = 1$, entonces si $ax^2 + bx + c$ tiene factores irreducibles en el conjunto de los polinomios con coeficientes enteros es porque tiene factores irreducibles de la forma $rx + p$ y $sx + q$ tal que

$$ax^2 + bx + c = (rx + p)(sx + q) = (rs)x^2 + (ps + qr)x + pq.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a &= rs \\ b &= ps + qr \\ c &= pq. \end{aligned}$$

Ahora, observe que $ac = (rs)(pq) = (ps)(qr)$. Esto implica que

$$\begin{aligned} ac &= (ps)(qr) \\ b &= (ps) + (qr). \end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.3. Algunos ejemplos.

1. Factorice $6x^2 - 7x - 3$.

   Respuesta: Note que $a = 6$, $b = -7$ y $c = -3$. Ahora, $ac = -18$, por lo tanto, tenemos que hallar dos enteros tales que su producto sea -18 y cuya suma sea -7. Por lo tanto, los enteros son -9 y 2, ya que

   $$(-9)(2) = -18 \quad \text{y} \quad (-9) + 2 = -7.$$

Ahora tenemos que

$$\begin{aligned} 6x^2 - 7x - 3 &= 6x^2 + (-9+2)x - 3 \\ &= 6x^2 - 9x + 2x - 3 \\ &= 3x(2x-3) + 2x - 3 \\ &= (2x-3)(3x+1). \end{aligned}$$

2. Factorice $3x^2 + 7x + 4$.

   Respuesta: Note que $a = 3$, $b = 7$ y $c = 4$. Ahora, $ac = 12$, por lo tanto, tenemos que hallar dos enteros tales que su producto sea 12 y cuya suma sea 7. Observe que los enteros son 4 y 3, ya que

   $$(4)(3) = 12 \quad \text{y} \quad 4 + 3 = 7.$$

   Ahora tenemos que

   $$\begin{aligned} 3x^2 + 7x + 4 &= 3x^2 + (4+3)x + 4 \\ &= 3x^2 + 4x + 3x + 4 \\ &= x(3x+4) + 3x + 4 \\ &= (3x+4)(x+1). \end{aligned}$$

3. Factorice $10x^2 + 33x - 7$.

   Respuesta: Note que $a = 10$, $b = 33$ y $c = -7$. Ahora, $ac = -70$, por lo tanto, tenemos que hallar dos enteros tales que su producto sea -70 y cuya suma sea 33. Observe que los enteros son 35 y -2, ya que

   $$(35)(-2) = -70 \quad \text{y} \quad 35 + (-2) = 33.$$

   Ahora tenemos que

   $$\begin{aligned} 10x^2 + 33x - 7 &= 10x^2 + (35-2)x - 7 \\ &= 10x^2 + 35x - 2x - 7 \\ &= 5x(2x+7) - 2x - 7 \\ &= (2x+7)(5x-1). \end{aligned}$$

4. Factorice $3x^2 - 2x - 1$.

   Respuesta: Note que $a = 3$, $b = -2$ y $c = -1$. Ahora, $ac = -3$, por lo tanto, tenemos que hallar dos enteros tales que su producto sea -3 y cuya suma sea -2. Observe que los enteros son -3 y 1, ya que

   $$(-3)(1) = -3 \quad \text{y} \quad -3 + 1 = -2.$$

Ahora tenemos que

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2x - 1 &= 3x^2 + (-3+1)x - 1 \\ &= 3x^2 - 3x + x - 1 \\ &= 3x(x-1) + x - 1 \\ &= (x-1)(3x+1). \end{aligned}$$

5. Factorice $2x^2 - xy - 10y^2$.

   Respuesta: Note que $a = 2$, $b = -y$ y $c = -10y^2$. Ahora, $ac = -20y^2$, por lo tanto, tenemos que hallar números tales que su producto sea $-20y^2$ y cuya suma sea $-y$. Observe que estos son $4y$ y $-5y$, ya que

   $$(4y)(-5y) = -20y^2 \quad \text{y} \quad 4y + (-5y) = -y.$$

   Ahora tenemos que

   $$\begin{aligned} 2x^2 - xy - 10y^2 &= 2x^2 + (4y - 5y)x - 10y^2 \\ &= 2x^2 + 4yx - 5yx - 10y^2 \\ &= 2x(x+2y) - 5y(x+2y) \\ &= (x+2y)(2x-5y). \end{aligned}$$

8.3 Factorización de binomios

La diferencia de dos cuadrados.

La diferencia de cuadrados surge al multiplicar factores de la forma $(a+b)$ por $(a-b)$:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Ejemplo 8.3.1. Algunos ejemplos.

1. Factorice $x^2 - 16$.

   Respuesta: Note que $x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$.

2. Factorice $4x^2 - 25$.

   Respuesta: Note que $4x^2 - 25 = (2x+5)(2x-5)$.

3. Factorice $x^4 - y^4$.

   Respuesta: Note que

   $$\begin{aligned} x^4 - y^4 &= (x^2+y^2)(x^2-y^2) \\ &= (x^2+y^2)(x+y)(x-y). \end{aligned}$$

4. Factorice $x^2 - y^2 + 2x - 2y$.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 2x - 2y &= (x+y)(x-y) + 2(x-y) \\ &= (x-y)(x+y+2). \end{aligned}$$

La suma o diferencia cubos.

La suma de dos cubos, $a^3 + b^3$, surge de la multiplicación

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

De igual manera, la diferencia $a^3 - b^3$, surge de la multiplicación

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

En otras palabras, sabemos que

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{y} \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Podemos utilizar estas fórmulas para factorizar polinomios.

Ejemplo 8.3.2. Algunos ejemplos.

1. Factorice $x^3 + y^3$.

   Respuesta: Una aplicación directa de la fórmula nos lleva a

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2).$$

2. Factorice $x^3 + 8$.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} x^3 + 8 &= x^3 + 2^3 \\ &= (x+2)(x^2 - 2x + 2^2) \\ &= (x+2)(x^2 - 2x + 4). \end{aligned}$$

3. Factorice $x^3 - 64$.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} x^3 - 64 &= x^3 - 4^3 \\ &= (x-4)(x^2 + 4x + 4^2) \\ &= (x-4)(x^2 + 4x + 16). \end{aligned}$$

4. Factorice $27x^3 - 64y^3$.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} 27x^3 - 64y^3 &= (3x)^3 - (4y)^3 \\ &= (3x - 4y)((3x)^2 + (3x)(4y) + (4y)^2) \\ &= (3x - 4y)(9x^2 + 12x4y + 16y^2). \end{aligned}$$

5. Factorice $a^6 - b^6$.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} a^6 - b^6 &= (a^2)^3 - (b^2)^3 \\ &= (a^2 - b^2)((a^2)^2 + (a^2)(b^2) + (b^2)^2) \\ &= (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) \\ &= (a + b)(a - b)(a^4 + a^2b^2 + b^4) \end{aligned}$$

   Los factores de $a^4 + a^2b^2 + b^4$ no se pueden obtener con las técnicas brindadas en esta sección. Ahora, se puede verificar que

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2).$$

   Por lo tanto,

$$a^6 - b^6 = (a + b)(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2).$$

8.4 Solución de ecuaciones usando la factorización

Podemos usar la propiedad del cero para resolver ecuaciones donde uno de los miembros de la ecuación es cero y el otro miembro se puede escribir como un producto de uno o más factores.

Propiedad del cero.

Si el producto de dos o más factores reales es cero, entonces por lo menos uno de los factores es cero. Esto es,

Si a y b son reales y $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Ejemplo 8.4.1. Algunos ejemplos.

1. Halla el conjunto solución (sobre los reales) para $x(x - 2) = 0$.

   Respuesta: Como $x(x - 2) = 0$, entonces tenemos que

$$x = 0 \quad \text{ó } x - 2 = 0.$$

   Por lo tanto, el conjunto solución es $\{0, 2\}$.

2. Resuelva $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

   Respuesta: Primero factorizamos el polinomio. Para esto, note que

   $$a = 2, \;\; b = -5, \;\; c = -3 \quad \text{y} \quad ac = -6.$$

   Ahora tenemos que encontrar dos enteros tales que el producto nos de -6 y la suma nos de -5. Estos enteros son -6 y 1. Entonces,

   $$\begin{aligned} 2x^2 - 5x - 3 &= 2x^2 + (-6+1)x - 3 \\ &= 2x^2 - 6x + x - 3 \\ &= 2x(x-3) + x - 3 \\ &= (x-3)(2x+1). \end{aligned}$$

   Por lo tanto, la ecuación $2x^2 - 5x - 3 = 0$ es equivalente a $(x-3)(2x+1) = 0$. Las soluciones a esta última están dadas por

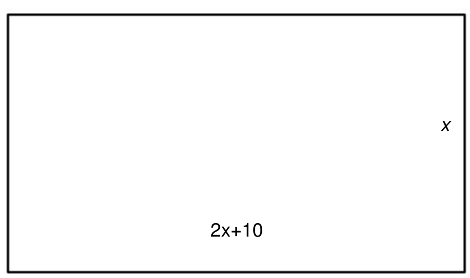
   $$x - 3 = 0 \quad \text{ó} \quad 2x + 1 = 0.$$

   Concluimos que el conjunto solución a esta ecuación está dado por

   $$\left\{3, -\frac{1}{2}\right\}.$$

3. Halla la medida del largo y el ancho de un rectángulo si el largo es 10 cm más que el doble del ancho. El área del rectángulo mide 132 cm^2.

   Respuesta: Note que tenemos



   Ahora, el área de un rectángulo está dada por $A = \text{largo} \times \text{ancho}$. Entonces,

   $$\begin{aligned} A &= l \times a \\ 132 &= (2x+10)(x) \\ 132 &= 2x^2 + 10x \\ 0 &= 2x^2 + 10x - 132. \end{aligned}$$

   Factorizemos $2x^2 + 10x - 132$. Note que

   $$a = 2, \;\; b = 10, \;\; c = -132 \quad \text{y} \quad ac = -264.$$

Entonces, queremos dos enteros tales que el producto de -264 y la suma de 10. Note que 22 y -12 satisfacen estas hipótesis. Entonces,

$$\begin{aligned}2x^2 + 10x - 132 &= 2x^2 + (22 - 12)x - 132 \\ &= 2x^2 + 22x - 12x - 132 \\ &= 2x(x + 11) - 12(x + 11) \\ &= (x + 11)(2x - 12).\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación $2x^2+10x-132 = 0$ es equivalente a $(x+11)(2x-12) = 0$. El conjunto solución para esta ecuación es $\{-11, 6\}$. Ahora, no todas las soluciones son válidas, pues estamos hablando de dimensiones de un rectángulo, por lo tanto, solo las positivas son válidas. Concluimos que $x = 6$. En otras palabras, el ancho es 6 cm, mientras el largo es $2(6) + 10 = 22$ cm.