Programa Inmersión, Verano 2024
Notas escritas por Dr. M

Notas del cursos. Basadas en los prontuarios de MATE 3001 y MATE 3171

Clase #9: viernes, 5 de julio de 2024.

9 Expresiones racionales

9.1 Fracciones equivalentes, divisor común mayor, múltiplo común menor

Recuerde que en capítulos anteriores habíamos trabajado con fracciones de enteros. Más aún, en esos capítulos demostramos que dada un fracción a/b, $b \neq 0$, existen una cantidad infinita de fracciones que son equivalentes a a/b, i.e.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k},$$

con $k \neq 0$.

De la misma manera, decimos que una expresión racional, $P(x)/Q(x)$ con $P(x), Q(x)$ polinomios es equivalente a una expresión racional de la forma

$$\frac{P(x)k(x)}{Q(x)k(x)},$$

con $k(x) \neq 0$.

Ejemplo 9.1.1. Algunos ejemplos.

1. $\dfrac{x}{4} = \dfrac{5x}{20} = \dfrac{x^2}{4x} = \dfrac{x^2+3x}{4x+12} = \cdots = \dfrac{x \cdot k(x)}{2 \cdot k(x)}$, con $k(x) \neq 0$.

2. $\dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{2x+4}{2x-2} = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1} = \cdots = \dfrac{(x+2) \cdot k(x)}{(x-1) \cdot k(x)}$, con $k(x) \neq 0$.

3. Halle una fracción con denominador $x^2 - 5x + 6$ equivalente a la fracción $\dfrac{x+3}{x-2}$.

   Respuesta: Note que $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Por lo tanto,

   $$\frac{x+3}{x-2} = \frac{(x+3)(x-3}{(x-2)(x-3)} = \frac{x^2-9}{x^2-5x+6}.$$

Antes de continuar con el tema de expresiones racionales, es una buena idea repasar los conceptos de múltiplo común menor (MCM) y divisor común mayor (DCM) de dos o más expresiones.

Definición 9.1.2. El múltiplo común menor de dos naturales a y b es el número natural $c \neq 0$ tal que

1. a y b dividen a c,
2. c es el número positivo menor divisible por ambos números.

Ejemplo 9.1.3. Note que $\text{MCM}(24, 80) = 240$.

De manera similar, podemos definir el MCM de dos polinomios.

Definición 9.1.4. El múltiplo común menor de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es el polinomio $M(x)$ tal que

1. $P(x)$ y $Q(x)$ son factores de $M(x)$ (lo dividen),
2. $M(x)$ es el polinomio con grado menor divisible por ambos polinomios.

Ejemplo 9.1.5. Algunos ejemplos.

1. Halle $\text{MCM}(x^2 - 1, x^2 - x)$.

   Respuesta: De forma análoga a los enteros, escribimos $x^2 - 1$ y $x^2 - x$ como producto de factores irreducibles (primos):

   $$\begin{aligned} x^2 - 1 &= (x+1)(x-1) \\ x^2 - x &= x(x-1). \end{aligned}$$

   Escogemos los factores primos diferentes que aparecen en ambas factorizaciones y elegimos la potencia mayor que aparece en una u otra factorización. Por lo tanto,
   $$\text{MCM}(x^2 - 1, x^2 - x) = x(x-1)(x+1).$$
   Observe que $\text{MCM}(x^2 - 1, x^2 - x) = x(x-1)(x+1) = x(x^2 - 1)$, por lo tanto $x^2 - 1$ divide a $x(x-1)(x+1)$. También, $\text{MCM}(x^2 - 1, x^2 - x) = x(x-1)(x+1) = (x^2 - x)(x+1)$, por lo tanto $x^2 - x$ divide a $x(x-1)(x+1)$.

2. Halle $\text{MCM}(6x^3, 9x^2)$.

   Respuesta: Note que

   $$\begin{aligned} 6x^3 &= 2 \cdot 3 \cdot x^3 \\ 9x^2 &= 3^2 \cdot x^2. \end{aligned}$$

   Escogemos los factores primos diferentes que aparecen en ambas factorizaciones y elegimos la potencia mayor que aparece en una o otra factorización. Por lo tanto,
   $$\text{MCM}(6x^3, 9x^2) = 2 \cdot 3^2 \cdot x^3 = 18x^3.$$

3. Halle $\text{MCM}(24x^2, 16y)$.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} 24x^2 &= 2^3 \cdot 3 \cdot x^2 \\ 16y &= 2^4 \cdot y. \end{aligned}$$

   Por lo tanto,

$$\text{MCM}(24x^2, 16y) = 2^4 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot y = 48x^2y.$$

4. Halle $\text{MCM}(x^2 - 6x + 9, x^2 - 9, x^2 - 4x + 3)$.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= (x-3)^2 \\ x^2 - 9 &= (x-3)(x+3) \\ x^2 - 4x + 3 &= (x-3)(x-1). \end{aligned}$$

   Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{MCM}(x^2 - 6x + 9, x^2 - 9, x^2 - 4x + 3) &= (x-3)^2(x+3)(x-1) \\ &= x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 36x - 27. \end{aligned}$$

<u>Resumen:</u>

Para hallar el múltiplo común menor de dos polinomios, haga lo siguiente:

1. Escriba cada expresión como un producto de potencias de factores irreducibles.
2. Selecciona los factores diferentes que aparecen en las factorizaciones de las expresiones.
3. Toma la máxima potencia de cada factor diferente.
4. El múltiplo común menor es el producto de las potencias mayores de los factores diferentes.

Ahora trabajaremos con el divisor común de mayor de polinomios. Primero refrescaremos la definición que tenemos para enteros.

Definición 9.1.6. El divisor común mayor (DCM) de $a, b \in \mathbb{Z}$ (al menos uno de ellos distinto de cero) es el entero positivo d tal que

1. d divide a a y b,
2. d es el entero positivo mayor que divide a ambos.

Ejemplo 9.1.7. Note que $\text{DCM}(144, 120) = 24$.

De manera similar, podemos definir el DCM de dos polinomios.

Definición 9.1.8. El divisor común mayor de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es el polinomio $D(x)$ tal que

1. $D(x)$ es factor de (divide a) $P(x)$ y $Q(x)$
2. $D(x)$ es el polinomio con grado mayor que divide a ambos polinomios.

Ejemplo 9.1.9. Algunos ejemplos.

1. Halle el divisor común de $x^2 - 1$ y $x^2 - x$.

   Respuesta: De forma análoga a los enteros, escribimos $x^2 - 1$ y $x^2 - x$ como producto de factores irreducibles (primos):

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= (x+1)(x-1) \\ x^2 - x &= x(x-1). \end{aligned}$$

   Escogemos los factores comunes en ambas factorizaciones y elegimos la potencia menor que aparece en una o otra factorización. Por lo tanto,

$$\text{DCM}(x^2 - 1, x^2 - x) = x - 1.$$

2. Halle $\text{DCM}(18x^4y^5, 30x^2y^7)$.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} 18x^4y^5 &= 2 \cdot 3^2 \cdot x^4 \cdot y^5 \\ 30x^2y^7 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot y^7. \end{aligned}$$

   Por lo tanto,

$$\text{DCM}(18x^4y^5, 30x^2y^7) = 2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot y^5 = 6x^2y^5.$$

3. Halle $\text{DCM}(x^2 - 6x + 9, x^2 - 9, x^2 - 4x + 3)$.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= (x-3)^2 \\ x^2 - 9 &= (x-3)(x+3) \\ x^2 - 4x + 3 &= (x-3)(x-1). \end{aligned}$$

   Por lo tanto,

$$\text{DCM}(x^2 - 6x + 9, x^2 - 9, x^2 - 4x + 3) = x - 3.$$

Resumen:

Para hallar el divisor común mayor de dos polinomios, haga lo siguiente:

1. Escriba cada expresión como un producto de potencias de factores irreducibles.
2. Selecciona los factores que tienen en común ambas factorizaciones.
3. Toma la menor potencia de cada uno de los factores comunes.
4. El múltiplo común menor es el producto de estas potencias.

Simplificación de expresiones racionales

En el capítulo 2 (lectura del 1 de junio) dijimos que una fracción de números enteros se encuentra en su forma más simple cuando el numerador y el denominador son relativamente primos, esto es, cuando el DCM de ambos es 1. De forma análoga, decimos que una expresión racional de la forma $P(x)/Q(x)$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios ($Q(x) \neq 0$) está en su forma más simple cuando $P(x)$ y $Q(x)$ son relativamentes primos, esto es, cuando $\mathrm{DCM}(P(x), Q(x)) = 1$.

Ejemplo 9.1.10. Algunos ejemplos.

1. Simplifica la expresión $\dfrac{6a^2b}{3ab^2}$.

   Respuesta: Note que
   $$\frac{6a^2b}{3ab^2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b}{3 \cdot a \cdot b \cdot b} = \frac{2a}{b}.$$

2. Simplifica la expresión $\dfrac{12x^3y}{4xy}$.

   Respuesta: Note que
   $$\frac{12x^3y}{4xy} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y}{4 \cdot x \cdot y} = 3x^2.$$

3. Simplifica la expresión $\dfrac{x-2}{2-x}$.

   Respuesta: Note que
   $$\frac{x-2}{2-x} = \frac{x-2}{-(x-2)} = -1.$$

4. Simplifica la expresión $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$.

   Respuesta: Note que
   $$\begin{aligned}\frac{x^2-4x+3}{x^2-9} &= \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{x-1}{x+3}.\end{aligned}$$

5. Simplifica la expresión $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-8x+15}$.

   Respuesta: Note que

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2-8x+15} = \frac{(x+3)(x+2)}{(x-3)(x-5)}$$

   Concluimos que $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-8x+15}$ está en su forma más simple.

6. Simplifica la expresión $\dfrac{x^3-1}{1-x^2}$.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned}\frac{x^3-1}{1-x^2} &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(1-x)(1+x)}\\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{-(x-1)(1+x)}\\ &= -\frac{x^2+x+1}{1+x}.\end{aligned}$$

9.2 Suma y resta de expresiones racionales

De manera similar al caso de fracciones de enteros, trabajamos primero el caso cuando tenemos dos expresiones racionales homogeneas. Sean $a(x), b(x), c(x)$ polinomios con $b(x) \neq 0$. Entonces,

$$\frac{a(x)}{b(x)} \pm \frac{c(x)}{b(x)} = \frac{a(x) \pm c(x)}{d(x)}.$$

Ejemplo 9.2.1. Algunos ejemplos.

1. $\dfrac{5}{x-3} + \dfrac{4x}{x-3} = \dfrac{4x+5}{x-3}$.

2. $\dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{4x^2}{2} = 2x^2$.

3. $\dfrac{x}{x-5} - \dfrac{5}{x-5} = \dfrac{x-5}{x-5} = 1$, si $x \neq 5$.

Suma y resta de expresiones racionales no homogeneas

Para sumar o restar dos expresiones racionales no homogéneas, podemos encontrar expresiones racionales homogéneas equivalentes a las expresiones a considerar y luego sumar o restar utilizando la regla anterior.

Ejemplo 9.2.2. Algunos ejemplos.

1. $\dfrac{3}{2x^2} + \dfrac{1}{4x}$.

   Respuesta: Note que $\mathrm{MCM}(2x^2, 4x) = 4x^2$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{4x} &= \frac{6}{4x^2} + \frac{x}{4x^2} \\ &= \frac{6+x}{4x^2}. \end{aligned}$$

2. $\dfrac{x}{x^2+x} - \dfrac{3}{4x+4}$.

   Respuesta: Note que $\mathrm{MCM}(x^2+x, 4x+4) = 4x(x+1) = x(4x+4)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+x} - \frac{3}{4x+4} &= \frac{4x}{4x(x+1)} - \frac{3x}{4x(x+1)} \\ &= \frac{x}{4x(x+1)} \\ &= \frac{1}{4(x+1)}. \end{aligned}$$

3. $2x - \dfrac{4}{x-2}$.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} 2x - \frac{4}{x-2} &= \frac{2x(x-2)}{x-2} - \frac{4}{x-2} \\ &= \frac{2x^2-4x}{x-2} - \frac{4}{x-2} \\ &= \frac{2x^2-4x-4}{x-2}. \end{aligned}$$

También podemos utilizar la siguiente fórmula

$$\frac{a(x)}{b(x)} \pm \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)d(x) \pm b(x)c(x)}{b(x)d(x)}.$$

Ejemplo 9.2.3. Algunos ejemplos.

1. $\dfrac{3}{2x^2} + \dfrac{1}{4x}$.

Respuesta: Note que

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2x^2}+\frac{1}{4x} &= \frac{3(4x)+2x^2(1)}{(2x^2)4x}\\
&= \frac{12x+2x^2}{8x^3}\\
&= \frac{2x(6+x)}{2x(4x^2)}\\
&= \frac{6+x}{4x^2}
\end{aligned}$$

2. $\dfrac{x}{x^2+x}-\dfrac{3}{4x+4}$.

   Respuesta: Note que

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x^2+x}-\frac{3}{4x+4} &= \frac{x(4x+4)-3(x^2+x)}{(x^2+x)(4x+4)}\\
&= \frac{4x^2+4x-3x^2-3x}{(x^2+x)(4x+4)}\\
&= \frac{x^2+x}{(x^2+x)(4x+4)}\\
&= \frac{1}{4x+4}.
\end{aligned}$$

9.3 Multiplicación y división de expresiones racionales

La multiplicación y la división de expresiones racionales se basan en el concepto de multiplicación y división de fracciones que analizamos anteriormente. En particular, si $a(x), b(x), c(x), d(x)$ son polinomios con, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{a(x)}{b(x)}\cdot\frac{c(x)}{d(x)} &= \frac{a(x)c(x)}{b(x)d(x)}, \quad \text{con } b(x)\neq 0, d(x)\neq 0.\\
\frac{a(x)}{b(x)}\div\frac{c(x)}{d(x)} &= \frac{a(x)}{b(x)}\cdot\frac{d(x)}{c(x)}=\frac{a(x)d(x)}{b(x)c(x)}, \quad \text{con } b(x)\neq 0, c(x)\neq 0, d(x)\neq 0.
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.3.1. Algunos ejemplos.

1. $\dfrac{5x^3}{y^2}\cdot\dfrac{y^3}{5x^2y^2}=\dfrac{5x^3y^3}{5x^2y^4}=\dfrac{x}{y}$.

2. $\dfrac{x+2}{x+1}\cdot\dfrac{x+3}{x+4}=\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+4)}=\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+5x+4}$.

3. $\dfrac{3x}{2y}\div\dfrac{5}{3y}=\dfrac{3x}{2y}\cdot\dfrac{3y}{5}=\dfrac{(3x)(3y)}{(2y)5}=\dfrac{9xy}{10y}=\dfrac{9x}{10}$.

4. $\dfrac{x^2-5x+6}{x+6} \div \dfrac{x-3}{5} = \dfrac{x^2-5x+6}{x+6} \cdot \dfrac{5}{x-3} = \dfrac{5(x^2-5x+6)}{(x+6)(x-3)}$.

   Ahora, note que

$$\begin{aligned}
\frac{5(x^2-5x+6)}{(x+6)(x-3)} &= \frac{5(x-2)(x-3)}{(x+6)(x-3)} \\
&= \frac{5(x-2)}{x+6} \\
&= \frac{5x-10}{x+6}.
\end{aligned}$$

   Concluimos que

$$\frac{x^2-5x+6}{x+6} \div \frac{x-3}{5} = \frac{5x-10}{x+6}.$$

9.4 Ecuaciones racionales

Se dice que una ecuación es racional si se puede escribir de la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0,$$

para $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.

Resolver una ecuación racional sobre los números reales consiste en hallar el conjunto de estos números que hacen cierta la ecuación. Para resolver la ecuación

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0,$$

debemos recordar que una fracción es cero si y solo si su numerador es cero y su denominador es diferente de cero. Para resolver la ecuación, tenemos que hallar los números reales x tales que $P(x) = 0$ y $Q(x) \neq 0$.

Ejemplo 9.4.1. Algunos ejemplos.

1. Halle el conjunto solución de la ecuación

$$\frac{x-3}{5} = 0.$$

   Respuesta: Como el denominador nunca es cero, entonces el conjunto solución está dado por aqellos reales para los cuales el numerador sea cero. Por lo tanto, el conjunto solución está dado por $\{3\}$.

2. Halle el conjunto solución de la ecuación

$$\frac{3x-2}{x+2} = 5.$$

Respuesta: Primero tenemos que escribir la ecuación en la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0.$$

Para esto, note que

$$\begin{aligned}
\frac{3x-2}{x+2} &= 5 \\
\frac{3x-2}{x+2} - 5 &= 0 \\
\frac{3x-2}{x+2} - \frac{5(x+2)}{x+2} &= 0 \\
\frac{3x-2}{x+2} - \frac{5x+10}{x+2} &= 0 \\
\frac{-2x-12}{x+2} &= 0.
\end{aligned}$$

Ahora, note que esta ecuación es cierta cuando $-2x - 12 = 0$ y $x + 2 \neq 0$. Resolvemos primero $-2x - 12 = 0$. Note que

$$\begin{aligned}
-2x - 12 &= 0 \\
-2x &= 12 \\
x &= \frac{12}{-2} \\
x &= -6.
\end{aligned}$$

El conjunto solución está dado por $\{-6\}$.

3. Halle el conjunto solución de la ecuación

$$\frac{x}{x+2} - \frac{4}{x+1} = -\frac{2}{x+2}.$$

Respuesta: Primero tenemos que escribir la ecuación en la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0.$$

Para esto, note que

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x+2} - \frac{4}{x+1} &= -\frac{2}{x+2} \\
\frac{x}{x+2} - \frac{4}{x+1} + \frac{2}{x+2} &= 0 \\
\frac{x+2}{x+2} - \frac{4}{x+1} &= 0 \\
1 - \frac{4}{x+1} &= 0 \\
\frac{x+1}{x+1} - \frac{4}{x+1} &= 0 \\
\frac{x-3}{x+1} &= 0.
\end{aligned}$$

Note que esta ecuación es cierta cuando $x-3=0$ y $x+1 \neq 0, x+2 \neq 0$. Concluimos que el conjunto solución está dado por $\{3\}$.

Otro método para resolver ecuaciones racionales

Otro método para resolver ecuaciones racionales es lo que se conoce como el proceso de "limpiar el denominador". Explicaremos este proceso con un ejemplo. Suponga que quiere resolver la ecuación

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}=1.$$

Note que si multiplicamos toda la ecuación por x^2, el cual es el denominador común mayor de todas las expresiones racionales, entonce obtenemos

$$x^2 \cdot \frac{2}{x}+x^2 \cdot \frac{3}{x^2}=x^2,$$

la cual es equivalente a

$$2x+3=x^2.$$

Por lo tanto, obtenemos la ecuación

$$0=x^2-2x+3.$$

Observe que $x^2-2x+3=(x-3)(x+1)$. Por lo tanto, nuestra ecuación se puede escribir como

$$\begin{aligned} x^2-2x+3 &= 0 \\ (x-3)(x+1) &= 0. \end{aligned}$$

Concluimos que el conjunto solución es $\{-1,3\}$.

Siempre es una buena idea verificar que en realidad no cometimos un error. Note que si $x=-1$, entonces,

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}=\frac{2}{-1}+\frac{3}{(-1)^2}=-2+3=1$$

y si $x=3$, entonces

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}=\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1.$$

Por lo tanto, es cierto que $\{-1,3\}$ es el conjunto solución a la ecuación

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}=1.$$

Ejemplo 9.4.2. Algunos ejemplos.

1. Halle el conjunto solución de la ecuación $\dfrac{3x-2}{x+1} = \dfrac{2}{3}$.

   Respuesta: Observe que el denominador mayor común de las expresiones racionales es $3(x+1)$. Multiplique toda la ecuación por $3(x+1)$ para obtener

$$\begin{aligned} 3(x+1)\cdot\frac{3x-2}{x+1} &= 3(x+1)\cdot\frac{2}{3} \\ 9x-6 &= 2x+2 \\ 9x-2x &= 2+6 \\ 7x &= 8 \\ x &= \frac{8}{7}. \end{aligned}$$

   Concluimos que el conjunto solución está dado por $\{8/7\}$.

2. Halle el conjunto solución de la ecuación $\dfrac{7}{x-1} - \dfrac{6}{x^2-1} = 5$.

   Respuesta: Observe que el denominador mayor común de las expresiones racionales es x^2-1. Multiplique toda la ecuación por x^2-1 para obtener

$$\begin{aligned} (x^2-1)\cdot\frac{7}{x-1} - (x^2-1)\cdot\frac{6}{x^2-1} &= (x^2-1)\cdot 5 \\ (x+1)(x-1)\cdot\frac{7}{x-1} - 6 &= 5x^2-5 \\ 7x+7-6 &= 5x^2-5 \\ 0 &= 5x^2-7x-6. \end{aligned}$$

   El polinomio $5x^2-7x-6$ factoriza como $(5x+3)(x-2)$, por lo tanto, tenemos la ecuación

$$\begin{aligned} 5x^2-7x-6 &= 0 \\ (5x+3)(x-2) &= 0. \end{aligned}$$

   Concluimos que $5x+3=0$ o $x-0$ y por lo tanto, el conjunto solución está dado por $\{-3/5, 2\}$.

3. Halle el conjunto solución de la ecuación $\dfrac{x+5}{x-3} = 1$.

   Respuesta: Multiplique toda la ecuación por $x-3$ para obtener

$$\begin{aligned} (x-3)\cdot\frac{x+5}{x-3} &= (x-3) \\ x+5 &= x-3 \\ 5 &= -3. \end{aligned}$$

   Esto ultimo es una contradicción, por lo tanto, no tenemos soluciones. En otras palabras, el conjunto solución está dado por $\emptyset$.