

Universidad de Puerto Rico, Río Piedras
Facultad de Ciencias Naturales
Departamento de Matemáticas
San Juan, Puerto Rico

Apellidos: El Rey Absoluto Nombre: Dr. M
No. estudiante: _____ Profesor: Dr. Luis A. Medina
Inmersión Examen 3 (MATE 3171).

INSTRUCCIONES

1. Esta prueba consiste de 22 ejercicios en 6 páginas.
2. El material de este examen (y el próximo) será considerado para determinar si aprueba el curso MATE 3023.
3. Escriba su nombre y número de estudiante **ahora**.
4. Muestre su trabajo. Para recibir crédito, sus respuestas deben estar bien escritas, justificadas y bien organizadas.
5. Por favor, apague el teléfono celular y cualquier otro aparato electrónico que pueda interrumpir a otros tomando el examen.
6. Esta prueba es de 2 horas.

_____ NO ESCRIBA DEBAJO DE ESTA LINEA _____

Valor	Puntuación
100	110

Éxito

¡Excelente!

1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$2x + 3y = 12$$

$$3x - 2y - 5 = 0.$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} 3 \cdot (2x + 3y = 12) \\ 2 \cdot (3x - 2y = 5) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 6x + 9y = 36 \\ -(6x - 4y = 10) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ 3x - 2(2) = 5 \\ 3x - 4 = 5 \\ 3x = 9 \\ \boxed{x = 3} \end{array} \\ & \quad \quad \quad \downarrow \\ & \quad \quad \quad 3y = 26 \\ & \Rightarrow \boxed{y = 2} \end{aligned}$$

2. Encuentre el cociente diferencial de $f(x) = x^2 + x + 2$

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ & \frac{(x+h)^2 + (x+h) + 2 - (x^2 + x + 2)}{h} \\ & \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{x} + h + \cancel{2} - \cancel{x^2} - \cancel{x} - \cancel{2}}{h} \\ & \frac{2xh + h^2 + h}{h} = \frac{h(2x + h + 1)}{h} = \boxed{2x + h + 1} \end{aligned}$$

3. Encuentre el conjunto solución de la ecuación $\sqrt[3]{x^2 - 1} - 2 = 0$.

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{x^2 - 1} - 2 = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 8 \\ & \sqrt[3]{x^2 - 1} = 2 \rightarrow x^2 - 1 = 8 \\ & x^2 - 1 = 2^3 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \\ & (x-3)(x+3) = 0 \\ & x = \pm 3 \leftarrow \text{ambas válidas} \end{aligned} \quad \text{C.S.} = \{\pm 3\}$$

4. Encuentre la tabla de veracidad del enunciado $(p \wedge q) \rightarrow r$.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
C	C	C	C	C
C	C	F	C	F
C	F	C	F	C
C	F	F	F	C
F	C	C	F	C
F	C	F	F	C
F	F	C	F	C
F	F	F	F	C

5. Considere el siguiente argumento. Si Luis tiene pelo, entonces Luis es un galán. Luis no tiene pelo. Por lo tanto, Luis no es un galán. ¿Es éste un argumento válido?

p : Luis tiene pelo,
 q : Luis es un galán

$$p \rightarrow q$$

$$\frac{\neg p}{\neg q}$$

No es válido. Note que si
 $p = F$
 $q = F$
entonces,

$$\frac{p \rightarrow q}{\frac{\neg p}{\neg q}} \Rightarrow \frac{F \rightarrow F}{\frac{C}{F}} \Rightarrow \frac{C}{F}$$

Cierto y cierto no puede implicar falso.

6. Encuentre el punto medio entre los puntos $(3, -5)$ y $(2, 8)$.

$$\text{pto medio} = \left(\frac{3+2}{2}, \frac{-5+8}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

7. Encuentre la distancia entre los puntos $(3, -5)$ y $(2, 8)$.

$$d = \sqrt{(3-2)^2 + (-5-8)^2} = \sqrt{1+169} = \sqrt{170}$$

8. Considere el siguiente círculo $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$. Determine el centro y el radio del círculo.

$$\text{centro} = (3, -2)$$

$$\text{radio} = \sqrt{16} = 4$$

9. Escriba la ecuación del círculo que tiene centro $(1, 4)$ y radio 3.

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$$

10. Considere el siguiente círculo $x^2 - 6x + y^2 + 4y = -4$. Encuentre la fórmula estándar para este círculo. Encuentre el centro y el radio de éste.

$$\begin{array}{l}
 b_1 = -6 \\
 b_1/2 = -3 \\
 (b_1/2)^2 = 9
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 b_2 = 4 \\
 b_2/2 = 2 \\
 (b_2/2)^2 = 4
 \end{array}
 \right.
 \begin{array}{l}
 x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = -4 + 9 + 4 \\
 (x-3)^2 + (y+2)^2 = 9 \\
 \text{centro: } (3, -2) \\
 \text{radio: } \sqrt{9} = 3
 \end{array}$$

11. Encuentre el conjunto solución de $2x^2 + 4x + 1 = 0$.

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{4} \\
 &= \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2} \\
 &= \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{4} \quad \text{C.S.} = \left\{ \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

12. Resuelva la igualdad $|2x + 4| = 3$.

$$\begin{array}{ll}
 2x+4=3 & -(2x+4)=3 \\
 2x=-1 & 2x+4=-3 \\
 x=-1/2 & 2x=-3-4 \\
 & 2x=-7 \\
 & x=-7/2
 \end{array}
 \quad \therefore \text{C.S.} = \left\{ -7/2, -1/2 \right\}$$

13. Resuelva la igualdad $|5x + 2| = |4x + 1|$.

$$\begin{array}{ll}
 5x+2=4x+1 & -(5x+2)=4x+1 \\
 5x-4x=1-2 & -5x-2=4x+1 \\
 x=-1 & -2-1=4x+5x \\
 & -3=9x \\
 & -3/9=x \\
 & -1/3=x
 \end{array}
 \quad \therefore \text{C.S.} = \left\{ -1, -1/3 \right\}$$

14. Resuelva la desigualdad $|3x + 4| < 9$. Escriba la solución en notación de intervalos.

$$\begin{array}{l}
 -9 < 3x+4 < 9 \\
 -9-4 < 3x < 9-4 \\
 -13 < 3x < 5 \\
 -13/3 < x < 5/3
 \end{array}
 \quad \boxed{\left(-13/3, 5/3 \right)}$$

15. Resuelva la desigualdad $|5x + 2| \geq 3$. Escriba la solución en notación de intervalos.

$$\begin{array}{ll}
 5x+2 \geq 3 & \text{o}' \quad 5x+2 \leq -3 \\
 5x \geq 1 & \text{o}' \quad 5x \leq -5 \\
 x \geq 1/5 & \text{o}' \quad x \leq -1 \\
 [1/5, \infty) & \cup \quad (-\infty, -1]
 \end{array}
 \quad \therefore \boxed{(-\infty, -1] \cup [1/5, \infty)}$$

16. Utilizando la técnica de completar cuadrados, encuentre el conjunto solución de $x^2 + 6x + 7 = 0$.

$$\begin{aligned}
 b &= 6 & x^2 + 6x + 7 &= 0 \\
 b/2 &= 3 & x^2 + 6x + 9 - 9 + 7 &= 0 \\
 (b/2)^2 &= 9 & (x+3)^2 - 2 &= 0 \\
 & & (x+3)^2 &= 2 \\
 & & x+3 &= \pm\sqrt{2} \\
 & & x &= -3 \pm\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

C.S. = $\{-3 \pm \sqrt{2}\}$

17. Considere la función cuadrática $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$. Encuentre el discriminante.

$$\begin{aligned}
 D &= b^2 - 4ac \\
 &= 4^2 - 4(3)(-2) \\
 &= 16 + 24 \\
 &= 40
 \end{aligned}$$

18. Sin graficar. Considere la siguiente función cuadrática: $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$. Determine si esta función es siempre positiva.

Note que el discriminante está dado por

$$\begin{aligned}
 D &= 25 - 4(2)(4) \\
 &= 25 - 32 \\
 &= -7 < 0
 \end{aligned}$$

Como el discr. es negativo, ent $f(x)$ no tiene ceros reales y por lo tanto, siempre es pos. o siempre es neg. Note q. $f(0) = 4 \leftarrow$ positivo
Por lo tanto, $f(x)$ es siempre positiva

19. Considere la siguiente función $f(x) = 4x + 2$. Demuestre que esta función es estrictamente creciente.

Suponga que $a < b$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 4a &< 4b \\
 \Rightarrow 4a + 2 &< 4b + 2 \\
 \Rightarrow f(a) &< f(b)
 \end{aligned}$$

Como $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
ent $f(x)$ es estrictamente creciente.

20. Encuentre el dominio y el campo de valores de la función $\sqrt{3x - 5} + 1$.

$$\begin{aligned}
 3x - 5 &\geq 0 \\
 3x &\geq 5 \\
 x &\geq 5/3
 \end{aligned}$$

$\therefore \text{dom}(f) = [5/3, \infty)$

Sabemos que $\sqrt{3x-5} + 1$ es creciente.
Note que en $5/3$ (pto terminal del dom.) tenemos $\sqrt{3(5/3) - 5} + 1 = 1$. Como es creciente, ent la función tiene como CV a $[1, \infty)$.

21. A Josefa le tomó 30 minutos más conducir 110 millas de lo que le tomó a Alexander conducir 100 millas. ¿Si Josefa manejó, en promedio, 15 mph menos que Alexander, entonces cuál fue la velocidad (rapidez) promedio de ambas?

$x = \text{vel. prom. Alex.}$
 $x - 15 = \text{vel. prom. Josefa}$

$$T_J = T_A + \frac{1}{2}$$

$$\frac{110}{x-15} = \frac{100}{x} + \frac{1}{2}$$

Mult. la ecuación por $2x(x-15)$ para obtener

$$220x = 100 \cdot 2(x-15) + x(x-15)$$

$$220x = x^2 + 175x - 3000 \quad \therefore x = 70$$

$$0 = x^2 - 35x - 3000$$

$$0 = (x+40)(x-75)$$

$$\therefore x = -40, 75$$

vel prom: 75 mph Alex
 vel prom: 60 mph Josefa

Nota: Estos valores se pueden obtener con fórmula cuadrática

22. Tres libretas y dos lápices cuestan \$5.40. Cuatro libretas y cinco lápices de la misma clase cuestan \$7.55. Cuál es el precio de una de estas libretas y uno de estos lápices?

Ejercicio de las libretas

$x = \text{costo libreta}$

$y = \text{costo lápiz}$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5.40 \\ 4x + 5y = 7.55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 8y = 21.60 \\ 12x + 15y = 22.65 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 7y = 1.05$$

$$y = \frac{1.05}{7}$$

$$\boxed{y = 0.15}$$

$$3x + 2y = 5.40$$

$$3x + 2(0.15) = 5.40$$

$$3x + 0.3 = 5.40$$

$$3x = 5.10$$

$$\boxed{x = 1.70}$$

Las libretas cuestan \$1.70 cada una y los lápices cuestan \$0.15 cada uno.