Universidad de Puerto Rico, Río Piedras
Facultad de Ciencias Naturales
Departamento de Matemáticas
San Juan, Puerto Rico

Apellidos: El jefe Nombre: Dr. M
No. estudiente: Profesor: Dr. Luis A. Medina
Inmersión Examen 4 (MATE 3171).

INSTRUCCIONES

1. Esta prueba consiste de 15 ejercicios en 8 páginas.
2. El material de este examen (y el anterior) será considerado para determinar si aprueba el curso MATE 3171.
3. Escriba su nombre y número de estudiante **ahora**.
4. Muestre su trabajo. Para recibir crédito, sus respuestas deben estar bien escritas, justificadas y bien organizadas.
5. Por favor, apague el teléfono celular y cualquier otro aparato electrónico que pueda interrumpir a otros tomando el examen.
6. Esta prueba es de 2 horas.

NO ESCRIBA DEBAJO DE ESTA LINEA

Valor	Puntuación
100	110

Éxito

¡Excelente!

1. Considere la secuencia **(5 pts)**

$$\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ -\frac{7}{8},\ \frac{9}{10},\ -\frac{11}{12},\ \frac{13}{14},\ldots$$

Encuentre el n-ésimo término de la secuencia.

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{2n}$$

2. Sea $f(x) = \sqrt{3x+2}$ y $g(x) = x^2 - 4$. Efectúe la operación y encuentre el dominio de las siguientes funciones

(a) $f + g$ **(5 pts)**

$\sqrt{3x+2} + x^2 - 4$

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(f+g) &= \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g) \\ &= [-2/3, \infty) \cap (-\infty, \infty) \\ &= [-2/3, \infty) \end{aligned}$$

(b) $\frac{f}{g}$ **(5 pts)**

$\frac{\sqrt{3x+2}}{x^2-4}$

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(f/g) &= \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g) \setminus \{x : g(x) = 0\} \\ &= [-2/3, \infty) \setminus \{-2, 2\} \\ &= [-2/3, 2) \cup (2, \infty) \end{aligned}$$

3. Sea $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2x - 1$. Encuentre la composición $f \circ g$ y su dominio. **(5 pts)**

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x-1) \\ &= \sqrt{2x-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(f \circ g) &= \{x \in \operatorname{dom}(g) : g(x) \in \operatorname{dom}(f)\} \\ &= \{x \in (-\infty, \infty) : 2x-1 \in [0, \infty)\} \\ &= \{x \in (-\infty, \infty) : x \in [1/2, \infty)\} \\ &= [1/2, \infty) \end{aligned}$$

$2x - 1 \geq 0$

$2x \geq 1$

$x \geq 1/2$

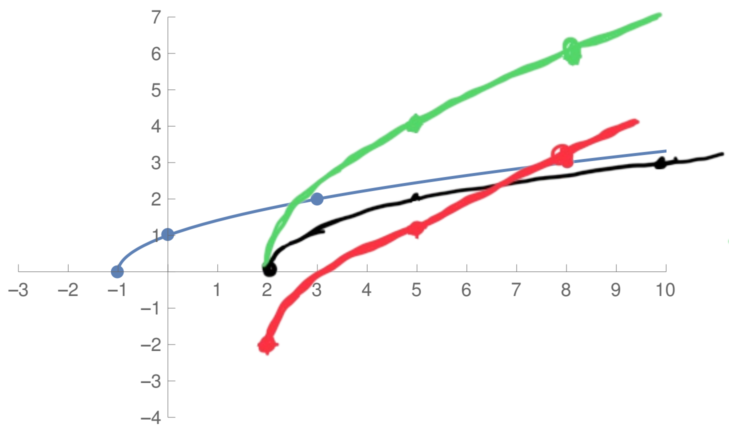
$[1/2, \infty)$

4. A continuación se presenta la gráfica de $f(x)$. Grafique la función $2f(x-2)-3$. **(5 pts)**

$f(x-2)$

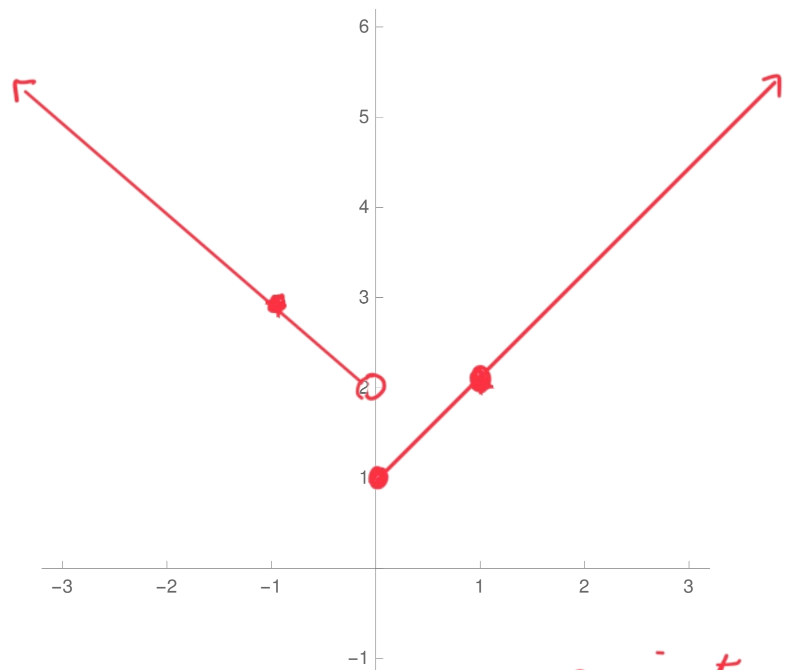
$2f(x-2)$

$2f(x-2)-3$



5. Grafique la siguiente función. Identifique los intervalos donde la función es creciente, decreciente o constante. **(5 pts)**

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ -x+2, & x < 0. \end{cases}$$



creciente: $[0, \infty)$

decreciente: $(-\infty, 0)$

6. Considere la función $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$. Haga lo siguiente:

(a) Encuentre el vértice de la parábola. Escriba la función en forma de vértice. **(5 pts)**

$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(2)} = -1$

$k = f(-1) = 2 - 4 + 4 = 2$

vértice: $(-1, 2)$

(b) Grafique la función. **(5 pts)**

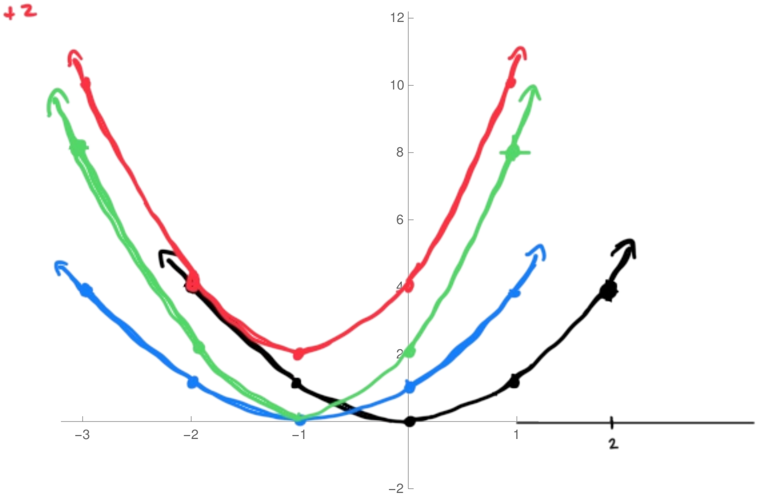
$f(x) = 2(x+1)^2 + 2$

x^2

$(x+1)^2$

$2(x+1)^2$

$2(x+1)^2 + 2$



7. Determine si la siguiente función es uno a uno. De serlo, encuentre su inversa. **(5 pts)**

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x-2}.$$

1-1:

Suponga que

$f(a) = f(b)$

$\frac{2a+1}{3a-2} = \frac{2b+1}{3b-2}$

$\Rightarrow (2a+1)(3b-2) = (2b+1)(3a-2)$

$\cancel{6ab} - 4a + 3b \cancel{-2} = \cancel{6ab} - 4b + 3a \cancel{-2}$

$-4a + 3b = -4b + 3a$

$-4a - 3a = -4b - 3b$

$-7a = -7b$

$a = b$

$\therefore f$ es 1-1

Inversa:

$y = \frac{2x+1}{3x-2}$

$y(3x-2) = 2x+1$

$3xy - 2y = 2x + 1$

$3xy - 2x = 2y + 1$

$x(3y-2) = 2y+1$

$x = \frac{2y+1}{3y-2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3y-2}$

8. Resuelva cada una de las siguientes desigualdades. Escriba su respuesta en notación de intervalos.

(a) $x^2 - x - 6 < 0$. **(5 pts)**

$(x-3)(x+2) < 0$

$+ \quad - \quad +$

$-2 \quad 3$

Sol: $(-2, 3)$

(b) $(x-1)^2(x+3) + (x-1)(x+3)^2 > 0$. **(5 pts)**

$(x-1)(x+3)[(x-1) + (x+3)] > 0$

$(x-1)(x+3)[2x+2] > 0$

pts prueba: $-3, -1, 1$

$- \quad + \quad - \quad +$

$-3 \quad -1 \quad 1$

Sol: $(-3, -1) \cup (1, \infty)$

(c) $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - x - 2} \leq 0$. **(5 pts)**

$+ \quad - \quad + \quad - \quad +$

$-3 \quad -1 \quad 2 \quad 3$

$\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x+1)}$

Sol: $[-3, -1) \cup (2, 3]$

pts prueba: $-3, -1^{x}, 2^{x}, 3$

9. Considere la función $\dfrac{2x+4}{x-1}$. Haga lo siguiente.

(a) Encuentre las asíntotas horizontales y verticales de esta función. **(5 pts)**

A.H.

$\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x+4}{x-1} \dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}$

$= \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{2 + 4/x}{1 - 1/x} = \dfrac{2}{1} = 2$

$\boxed{y=2}$

A.V.

cand: 1

izq.

$x \to 1^-$, $x < 1$, $x - 1 < 0$

$x - 1 \to 0^-$

$2x+4 \to 6$

$\lim_{x \to 0^-} \dfrac{2x+4}{x-1} = -\infty$

$\boxed{x=1}$

der: $x \to 1^+$, $x > 1$, $x - 1 > 0$

$x - 1 \to 0^+$

$2x+4 \to 6$

$\lim_{x \to 0^+} \dfrac{2x+4}{x-1} = +\infty$

(b) Encuentre los cortes en el eje de x y en el eje de y. **(5 pts)**

pts prueba: $1^{x}, -2$

$+ \quad - \quad +$

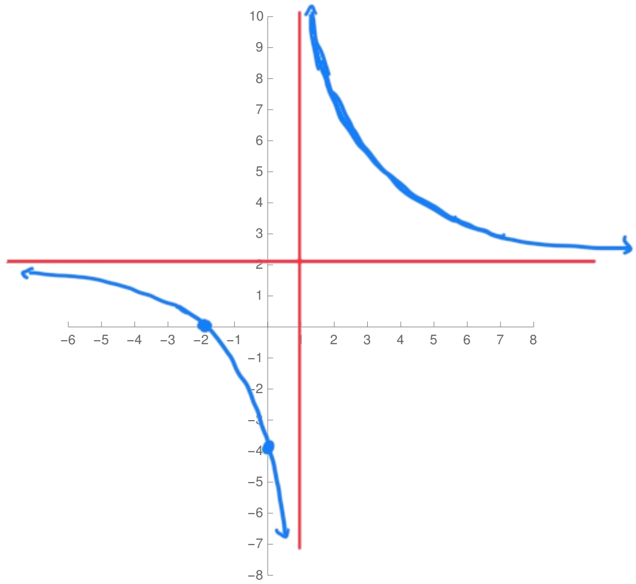
$-2 \quad 1$

corte eje x: $(-2, 0)$

corte eje y: $(0, f(0))$

$(0, -4)$

(c) Grafique la función. **(5 pts)**



10. Considere la secuencia infinita con n-ésimo término $a_n = \dfrac{(-2)^n}{n!}$. Encuentre los primeros 5 términos de esta secuencia. **(5 pts)**

$a_1 = \dfrac{(-2)^1}{1!} = \boxed{-2}$ $\qquad a_3 = \dfrac{(-2)^3}{3!} = \dfrac{-8}{6} = \boxed{\dfrac{-4}{3}}$ $\qquad a_5 = \dfrac{(-2)^5}{5!} = \dfrac{-32}{120} = \boxed{\dfrac{-4}{15}}$

$a_2 = \dfrac{(-2)^2}{2!} = \dfrac{4}{2} = \boxed{2}$ $\qquad a_4 = \dfrac{(-2)^4}{4!} = \dfrac{16}{24} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

11. Determine cuáles de las siguientes secuencias son aritméticas. De ser aritmética, encuentre el n-ésimo término.

(a) $2, 6, 10, 14, 18, \cdots$ **(5 pts)**

dif. común 4

$$\therefore a_n = a_1 + d(n-1)$$
$$= 2 + 4(n-1) = 4n - 2$$

(b) $3, 8, 13, 19, 24, \cdots$ **(5 pts)**

no es aritmética

Note que $8-3=5$, pero $19-13=6$

12. Encuentre $6 + 13 + 20 + 27 + 34 + 41 + \cdots + 139$. **(5 pts)**

dif. común 7

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$
$$= 6 + 7(n-1)$$
$$= 7n - 1$$

$\therefore$ El valor de la suma está dada por

$$\frac{N(a_1 + a_N)}{2} = 20\left(\frac{6+139}{2}\right)$$
$$= 10(145)$$
$$= \boxed{1450}$$

$a_N = 139$

$7N - 1 = 139$

$7N = 140$

$N = 20 \leftarrow$ hay 20 términos

13. Suponga que h es directamente proporcional a z, y $h = 210$ cuando $z = 200$. Encuentre la constante de proporción. **(5 pts)**

Sabemos que

$$h = K \cdot z$$

También,

$$210 = K \cdot 200$$

$$\therefore K = \frac{210}{200} = \boxed{\frac{21}{20}}$$

14. A un empleado le pagan \$25,000 el primer año y recibe \$1,250 de aumento cada año por los próximos 29 años. Encuentre el total de salario que el empleado gana durante este tiempo y el promedio artimético de los 30 salarios anuales. **(5 pts)**

Note que los salarios satisfacen una secuencia aritmética con $d = 1250$.

$$\therefore a_n = a_1 + d(n-1)$$
$$= 25000 + 1250(n-1)$$
$$= 1250n + 23,750$$

$$a_{30} = 1250(30) + 23,750$$
$$= 37,500 + 23,750$$
$$= 61,250$$

Salario total durante los 30 años

$$\frac{N(a_1 + a_N)}{2} = \frac{30(25,000 + 61,250)}{2}$$
$$= 15(86,250)$$
$$= \boxed{\$1,293,750}$$

Promedio aritmético

$$\frac{a_1 + a_N}{2} = \frac{25,000 + 61,250}{2}$$
$$= \frac{86,250}{2}$$
$$= \boxed{\$43,125}$$

CONTINUA EN LA PRÓXIMA PÁGINA

15. Una pelota se tira directamente hacia arriba con velocidad inicial de 96 pies por segundo desde un techo que esta a 20 pies sobre el nivel del piso. La altura de la pelota en pies al tiempo t (en segundos) está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 96t + 20.$$

Encuentre la altura máxima de la pelota sobre el nivel del piso. **(5 pts)**

Vértice:

$H = -\frac{b}{2a}$

$= \frac{-96}{2(-16)}$

$= 3$

$K = h(H)$

$= h(3)$

$= -16(3)^2 + 96(3) + 20$

$= 164$

La altura máxima que alcanza la pelota es $\boxed{164 \text{ pies}}$